134. La fonction $g(x_1, x_2) = P_2^2(x_1, S(x_2))$ est-elle récursive?

135. Définir:

a) Une fonction constante différente de 0 : $f(x) = a$

b) Une fonction constante généralisée : $f(x_1,\ldots, x_n) = a$

136. Construire la FRP dite permutation, pe. Elle permet de passer d'une fonction $f(x_1,\ldots, x_n)$ à la fonction $g(x_{i_1},\ldots, x_{i_n})$ en permutant les variables de f. Avant de construire une telle fonction, définir une fonction permutation à deux variables.

L'opération SUB permet de composer un très grand nombre de FRP. Cependant, l'ensemble de celles-ci ne contient aucune fonction 'évolutive'. Pour cela il faut disposer d'une autre opération.

5) L'opération de RECURRENCE [REC]

Par cette opération, on peut construire des FRP dont chaque valeur se calcule de manière progressive et ordonnée. C'est pour cela que nous les nommons 'évolutives'. Chacune d'entre elles se définit à l'aide de deux états: un état initial et un état inductif. Ces deux états sont représentés par deux fonctions de n, respectivement n+2 variables, et ils définissent une FRP de n+1 variables.

Soit les fonctions f et h définies ainsi:

$$f: \underbrace{N\times \ldots \times N}_{\underline{n}\ \text{fois}} \rightarrow N,\ f(x_1,\ldots, x_n)$$

$$h: \underbrace{N\times \ldots \times N}_{\underline{n+2}\ \text{fois}} \rightarrow N,\ f(x_1,\ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$$

Si f et h sont des FRP, alors la fonction g définie comme suit l'est aussi:

$$g: \underbrace{N\times \ldots \times N}_{\underline{n+1}\ \text{fois}} \rightarrow g(x_1,\ldots, x_n, x_{n+1})$$

$$g(x_1,\ldots, x_n, x_{n+1}) : \begin{cases} \text{ETAT INITIAL} \\ g(x_1,\ldots, x_n, 0) = f(x_1,\ldots, x_n) \\ [\text{si } n = 0 \text{ on choisit une fonction constante}] \\ \text{ETAT INDUCTIF} \\ g(x_1,\ldots, x_n, a+1) = h(x_1,\ldots, x_n, a, g(x_1,\ldots, x_n, a)) \end{cases}$$

Lorsque nous voulons définir une fonction évolutive qui caractérise telle ou telle opération arithmétique, il est donc nécessaire d'analyser les états initial et inductif qui la fondent.

Exemples :

a] Intention: définition d'une FRP qui caractérise l'addition.

Analyse naïve des états associés à l'addition:

Etat initial : $x+0 = x$

Etat inductif: $x+(a+1) = (x+a)+1$

Construction d'une FRP + telle que

$+ : N\mathrm{x}N \rightarrow N, +(x_1, x_2)$

et

$$+(x_1, x_2) : \begin{cases} +(x_1, 0) \text{ soit } x_1 & \text{-état initial-} \\ + (x_1, a+1) \text{ soit } (x_1+a)+1 & \text{-état inductif-} \end{cases}$$

Détermination d'une FRP $\underline{f}$ à une variable et qui caractérise l'état initial.

$f: N \rightarrow N$, $f(x)$ telle que $f(x)$ soit x.

La FRP $P_1^1(x)$ remplit ces conditions.

Détermination d'une FRP $\underline{h}$ à trois variables et qui caractérise l'état inductif.

$h: N\mathrm{x}N\mathrm{x}N \rightarrow N$, $h(x_1, x_2, x_3)$ telle que $h(x_1, a, +(x_1, a))$ soit $(x_1+a)+1$

$h(x_1, x_2, x_3) = S(P_3^3(x_1, x_2, x_3))$ remplit ces conditions

Définition de la FRP +:

$$+(x_1, x_2) : \begin{cases} +(x_1, 0) = P_1^1(x_1) \\ +(x_1, a+1) = S(P_3^3(x_1, a, +(x_1, a))) \end{cases}$$

Q u e s t i o n s :

137. Démontrer que la fonction $S(P_3^3(x_1, x_2, x_3))$ est une FRP.

138. Calculer "pas par pas" la valeur de $+(2, 2)$

b] Intention: définition d'une FRP qui caractérise la multiplication

Analyse naïve des états

Etat initial : $x.0 = 0$

Etat inductif : $x.(a+1) = (x.a)+x$

Construction d'une FRP . telle que

$. : N\mathrm{x}N \rightarrow N, .(x_1, x_2)$

et

$$.(x_1, x_2) : \begin{cases} .(x_1, 0) \text{ soit } 0 & \text{-état initial-} \\ .(x_1, a+1) \text{ soit } (x_1.a)+x_1 & \text{-état inductif-} \end{cases}$$

Détermination d'une FRP f à une variable telle que:

f: $N \rightarrow N$, $f(x)$ telle que $f(x)$ soit 0

La fonction $Z(x)$ remplit ces conditions.

Détermination d'une FRP h à trois variables telle que

h: $N \times N \times N \rightarrow N$, $h(x_1, x_2, x_3)$ telle que

$h(x_1, a, .(x_1, a))$ soit $(x_1.a)+x_1$

La fonction $+(P_3^3(x_1, x_2, x_3), P_1^3(x_1, x_2, x_3))$ remplit ces conditions.

Définition de la FRP . :

$$.(x_1, x_2) : \begin{cases} .(x_1, 0) = Z(x_1) \\ .(x_1, a+1) = +(P_3^3(x_1, a, .(x_1, a)), P_1^3(x_1, a, .(x_1, a))) \end{cases}$$

Q u e s t i o n s :

139. Démontrer que $+(P_3^3(x_1, x_2, x_3), P_1^1(x_1, x_2, x_3))$ est une FRP.

140. Calculer "pas par pas" $.(3, 2)$.

c] Intention: définition d'une FRP qui caractérise l'opération unaire 'factorielle'.

Analyse naïve des états

Etat initial : $0! = 1$

Etat inductif : $(a+1)! = (a+1).a!$

Construction d'une FRP ! telle que :

$! : N \rightarrow N$, $!(x)$

et

$$! : \begin{cases} !(0) \text{ soit } 1 \\ !(a+1) \text{ soit } (a+1).a! \end{cases}$$

Détermination d'une FRP f, constante, qui caractérise l'état initial:

$f : N \rightarrow N$, $f(x)$ telle que $f(x) = 1$

$S(Z(x))$ remplit ces conditions.

Détermination d'une FRP h, à deux variables qui caractérise l'état inductif:

$h : N \times N \rightarrow N$, $h(x_1, x_2)$ telle que $h(x_1, a+1)$ soit $(a+1).a!$

$.(S(P_1^2(x_1, x_2)), P_2^2(x_1, x_2))$ remplit ces conditions.

Définition de ! :

$$!(x) : \begin{cases} !(0) = S(Z(0)) \\ !(a+1) = .(S(P^2_1(a,\ !(a))),\ P^2_2(a,\ !(a))) \end{cases}$$

Q u e s t i o n s :

141. Définir une FRP qui caractérise l'opération 'exponentielle'.

Suggestion: -poser $ex(x_1, x_2)$ pour $x_1^{x_2}$

-état initial : $x_1^0 = 1$ c'est-à-dire $ex(x_1, 0) = 1$

-état inductif, $ex(x_1, a+1) = h(x_1, a, ex(x_1, a))$

-la fonction h doit réaliser le produit de la première variable par la troisième.

142. Une fonction est dite polynomiale si elle a la forme suivante par exemple:

$f: N{\times}N \rightarrow N$

$f(x_1, x_2) = ax^2+bx^3y^2+cy^9+ d$ avec a, b, c et d $\in$ N.

Les fonctions de ce type là sont-elles des FRP?

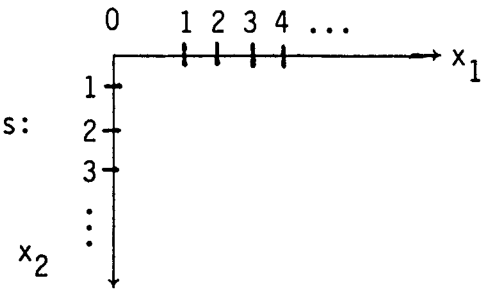
143. Soit la fonction suivante : $f: N{\times}N \rightarrow N$

$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1+x_2)(x_1+x_2+1)+x_2$

Que détermine cette fonction si l'on applique la représentation suivante

Suggestion: calculer les valeurs suivantes:

f(0, 0), f(1, 0), f(0, 1), f(2, 0), f(1, 1), f(0, 2), f(3, 0), ...



3.2 Etude de quelques FRP particulières

a) La fonction 'prédécesseur', pr:

$$pr(x) : \begin{cases} pr(0) = Z(0) \\ pr(a+1) = S(P^2_2(a,\ pr(a))) \end{cases}$$

Cette fonction permet de calculer le prédécesseur de tout nombre entier naturel en respectant les conditions suivantes:

1] pr(x) = 0 si x est 0

2] pr(x) = x-1 si x est plus grand que 0.

b) La fonction 'monus', $\dot{-}$:

$$\dot{-}(x_1, x_2) : \begin{cases} \dot{-}(x_1, 0) = P_1^1(x_1) \\ \dot{-}(x_1, a+1) = pr(P_3^3(x_1, a, \dot{-}(x_1, a))) \end{cases}$$

Cette fonction permet de calculer la différence positive de deux nombres en respectant les conditions suivantes:

1] $\dot{-}(x_1, x_2) = 0$ si x_1 est plus petit que x_2

2] $\dot{-}(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ si x_1 est plus grand ou égal à x_2.

c) La fonction 'signe', si :

$$si(x) : \begin{cases} si(0) = Z(0) \\ si(a+1) = S(Z(P_2^2(a, si(a)))) \end{cases}$$

Cette fonction attribue l'une des deux valeurs 1 ou 0 en respectant les conditions suivantes:

1] $si(x) = 0$ si x est 0

2] $si(x) = 1$ si x est différent de 0.

d) La fonction 'signe inversé', $\overline{si}$:

$$\overline{si}(x) = \dot{-}(S(Z(x)), P_1^1(x)).$$

Cette fonction attribue l'une des deux valeurs 1 ou 0 en respectant les conditions suivantes:

1] $\overline{si}(x) = 1$ si x est 0

2] $\overline{si}(x) = 0$ si x est différent de 0.

e) La fonction 'valeur absolue de la différence', va :

$va(x_1, x_2) = +(\dot{-}(x_1, x_2), \dot{-}(x_2, x_1))$

Dans la suite de cet exposé, nous nous autoriserons à mentionner les FRP d'une manière plus conforme à l'habitude mathématique. Nous écrirons, par exemple, $x_1 \dot{-} x_2$ en lieu et place de $\dot{-}(x_1, x_2)$.

Les fonctions précédentes ont un intérêt dont l'évidence n'apparaît pas immédiatement. Insistons tout d'abord sur le point suivant. Lorsque nous traitons des fonctions, bien souvent elles sont associées à des conditions. Ces conditions sont des relations. Il est donc nécessaire d'expliciter cette manière de faire. D'autre part, rappelons une des raisons pour laquelle nous nous intéressons aux fonctions récursives. Un de nos objectifs est de déterminer si une ebf donnée appartient ou non à l'ensemble des théorèmes. Nous exigeons plus: étant donné une suite d'ebf, celle-ci appartient-elle à l'ensemble des preuves? Ces deux questions se transposent en termes d'appartenance ou non d'un nombre à un ensemble de nombres. Dit autrement, une ebf (ou une suite d'ebf) arithmétiquement codée, appartient-elle à tel ou tel ensemble défini par une propriété ou une relation, elles aussi arithmétiquement codées? Il nous faut donc disposer d'une caractérisation de ces notions. Et pour rendre l'image de ces notions effective, il faut leur associer une procédure effectivement calculable, c'est-à-dire récursive.

Dans cette perspective, nous utiliserons à nouveau la notion de fonction caractéristique.

Soit R, une relation n-aire: $R(x_1, \ldots, x_n)$

$$f_R(x_1, \ldots, x_n) : \begin{cases} 0 \text{ si } x_1, \ldots, x_n \text{ ont entre eux la relation R} \\ 1 \text{ si } x_1, \ldots, x_n \text{ n'ont pas entre eux la relation R.} \end{cases}$$

DEFINITION : Une relation n-aire est primitive récursive [RPR] si et seulement si sa fonction caractéristique associée est une FRP.

Nous exposerons plus loin de quelle manière 'représenter' dans un SF ces relations n-aires.

<u>Quelques propriétés et relations primitives récursives</u>

a) La propriété ETRE UN NOMBRE ENTIER NATUREL, N :
$N(x)$; $f_N: N \rightarrow N$, $f_N(x) = Z(x)$

b) La propriété ETRE UN NOMBRE PAIR, P :
$P(x)$; $f_P: N \rightarrow N$,

$$f_P(x) : \begin{cases} f_P(0) = S(Z(0)) \\ f_P(a+1) = \overline{si}(a.f_P(a)) \end{cases}$$

Q u e s t i o n :

144. Calculer les valeurs de la fonction f_P pour $x \leq 6$.

c) La relation ETRE EGAL A, = :
$=(x_1, x_2)$; $f_= : N\times N \rightarrow N$,
$f_=(x_1, x_2) = si(|x_1 \dot{-} x_2|)$

d) La relation ETRE PLUS GRAND QUE, > :
$>(x_1, x_2)$; $f_> : N\times N \rightarrow N$,
$f_>(x_1, x_2) = \overline{si}(|x_1 \dot{-} x_2|)$

Question:

145. Construire les fonctions $f_{\neq}$ et $f_{\geq}$ associées aux relations ETRE INEGAL A et ETRE PLUS GRAND OU EGAL A.

Quelques règles dérivées

Soit $R_1(x_1,\dots, x_n)$ et $R_2(x_1,\dots, x_n)$, deux RPR et $f_{R_1}(x_1,\dots, x_n)$ et $f_{R_2}(x_1,\dots, x_n)$, leurs FRP associées.

1] La conjonction des deux RPR est une RPR et sa FRP associée est:

$$f_{R_1}(x_1,\dots, x_n) + f_{R_2}(x_1,\dots,x_n)$$

2] La disjonction des deux RPR est une RPR si ces relations s'excluent mutuellement. La FRP associée est:

$$f_{R_1}(x_1,\dots, x_n) \cdot f_{R_2}(x_1,\dots, x_n)$$

3] La négation d'une RPR est une RPR. La FRP associée est:

$$(1 \dot{-} f_R(x_1,\dots, x_n))$$

Ces trois résultats sont généralisables et combinables.

4] Définition par cas.
Soit n RPR qui s'excluent mutuellement, $R_1,\dots, R_n$ et telles que, quel que soit le k-uple $\langle x_1,\dots, x_k\rangle$, il est vérifié par l'une des relations.

Soit les n FRP associées aux n RPR:
$f_{R_1},\dots, f_{R_n}$

Soit enfin, n FRP:
$g_1,\dots, g_n$

La fonction définie par cas comme suit est une FRP

$$h(x_1,\dots, x_k) : \begin{cases} g_1(x_1,\dots, x_k) & \text{si } R_1 \text{ est vraie} \\ \vdots & \\ g_n(x_1,\dots, x_k) & \text{si } R_n \text{ est vraie} \end{cases}$$

Sa forme fonctionnelle est la suivante:

$$h(x_1,\dots, x_k) = g_1(x_1,\dots, x_k)\cdot(1 \dot{-} f_{R_1}(x_1,\dots, x_k))+\dots+g_n(x_1,\dots, x_k). (1 \dot{-} f_{R_n}(x_1,\dots, x_k))$$

Si $f(x_1,\dots, x_n, z)$ est une FRP, alors

5] La fonction SOMMATION [SOM] définie comme suit l'est également:

$$\underset{x \leq z}{\mathrm{SOM}}(x_1,\dots, x_n, x) : \begin{cases} 0 & \text{si } z \text{ est } 0 \\ f(x_1,\dots, x_n, 0)+\dots+f(x_1,\dots, x_n, z) & \text{si } z \text{ est plus grand que } 0 \end{cases}$$

Si $f(x_1,\dots, x_n, z)$ est une FRP, alors

6] La fonction PRODUIT [PRO] définie comme suit est une FRP.

$$\underset{x\leq z}{PRO}(x_1,\dots, x_n, x) : \begin{cases} 1 \text{ si } z \text{ est } 0 \\ f(x_1,\dots, x_n, 0)\cdot \dots \cdot f(x_1,\dots, x_n, z) \\ \text{si } z \text{ est plus grand que } 0 \end{cases}$$

Soit $R(x_1,\dots, x_n, x)$, une RPR, et f_R sa FRP associée.

7] La relation EXISTENTIELLE BORNEE [EB] est une RPR

$\underset{x\leq z}{EB}(x_1,\dots, x_n, x)$: il a y un x, $x\leq z$, tel que $R(x_1,\dots, x_n, x)$ est vraie.

Sa fonction associée se définit comme suit:

$$f_{EB}(x_1,\dots, x_n, x) = \overline{si}(\underset{x\leq z}{SOM}(1\dot{-}f_R(x_1,\dots, x_n, x)))$$

8] La relation UNIVERSELLE BORNEE [UB] est une RPR

$\underset{x\leq z}{UB}(x_1,\dots, x_n, x)$: pour tout x, $x\leq z$, $R(x_1,\dots, x_n, x)$ est vraie

Sa fonction associée se définit comme suit:

$$f_{UB}(x_1,\dots, x_n, x) = \overline{si}\ (\underset{x\leq z}{PRO}(1\dot{-}f_k(x_1,\dots, x_n, x))).$$

9] La fonction MINIMALISATION BORNEE [MB] est une FRP

$$MB(x_1,\dots, x_n) : \begin{cases} \text{Le plus petit } x \text{ plus petit que } z \text{ (s'il existe)} \\ \text{tel que } R(x_1,\dots, x_n, x) \text{ est vraie} \\ z \text{ autrement.} \end{cases}$$

Construction de la fonction MB

Objectif: construire une fonction dont la valeur pour le k-ième x rencontré est k ($0\leq k\leq z$), pour autant que cet x particulier soit plus petit que z, qu'il valide la relation R, et qu'il soit le plus petit x remplissant ces conditions.

Analyse de la situation

Relations R avec les valeurs x, $x\leq z$

$R(-, 0), R(-, 1),\dots, R(-, k), R(-, k+1),\dots, R(-, z)$

Valeurs de la fonction caractéristique associée à R: f_R

1 , 1 ,..., 0 , 1 ,..., 0

↑ le premier x qui remplit les conditions

Modification des valeurs de la fonction f_R (quelles qu'elles soient) pour $x>k$

$$\underbrace{1 \quad , 1 \quad ,\dots,}_{\substack{g(f_R(-,\ x)) = 1 \\ \text{pour } x<k}} \underbrace{0 \quad , 0 \quad ,\dots, 0}_{\substack{g(f_R(-,\ x)) = 0 \\ \text{pour } x\geq k}}$$

$$g(f(-, x)) : \underset{x \leq z}{\mathrm{si}}(PRO(f_R(-,x)))$$

Sommation de la suite précédente :

1 , 2 1,..., k , k ,..., k

pour x = 0, x = ,..., x = k-1, x = k,..., x=z

Il s'agit de la fonction MB

$$MB(x_1,\ldots, x_n) = \underset{x \leq z-1}{SOM}(\underset{\underbrace{\bar{x} \leq x}}{\mathrm{si}}(PRO(f_k(x_1,\ldots, x_n, \bar{x}))))$$

Le $\bar{x}$ est assujetti au x de la fonction SOM

Nous écrirons dorénavant cette fonction MB de la manière abrégée suivante:

$$MB(x_1,\ldots, x_n) = m[x<z](f_R(x_1,\ldots, x_n, x))$$

Pour toute RPR, un ensemble au plus dénombrable de fonctions MINIMALI=SATION BORNEE peut lui être associée. Il est intéressant de remarquer que toute FRP de type MB à n variables est définie à partir d'une FRP à n+1 variables.

Exemplification du mode de calcul d'une fonction MB.

Soit la RPR suivante:

$R(x_1, x_2, x) : x_1+x_2 = 2.x$

Soit la fonction caractéristique associée à cette relation R: f_R. Nous n'expliciterons pas cette fonction pour des raisons d'économie de place. Nous la mentionnerons chaque fois que nous en aurons l'usage sous sa forme générale: $f_R(x_1, x_2, x)$.

Détermination de la valeur de la fonction MB:

MB: NxN $\longrightarrow$ N, $MB(x_1, x_2) = m[x<z](f_R(x_1, x_2, x))$

pour les valeurs $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ et $z = 3$.

Il s'agit donc de calculer le plus petit x, plus petit ou égal à 3 tel que 3+1 = 2.x

Dit autrement, il s'agit de calculer

$MB(3,1) = m[x<3](f_R(3, 1, x))$

$$MB(3, 1) = \underset{x \leq 2}{SOM}(\underset{\bar{x} \leq x}{\mathrm{si}}\ (PRO(f_R(3, 1, \bar{x}))))$$

$$\underbrace{\underbrace{si(PRO(f_R(3,\ 1,\ \overline{x})))}_{\overline{x}\le 0}}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\underbrace{si(PRO(f_R(3,\ 1,\ \overline{x})))}_{\overline{x}\le 1}}_{\mathrm{II}}+\underbrace{\underbrace{si(PRO(f_R(3,\ 1,\ \overline{x})))}_{\overline{x}\le 2}}_{\mathrm{III}}$$

I. $si\,[\underbrace{f_R(3,\ 1,\ 0)}_{1}]$, et $si(1) = 1$

II. $si\,[\underbrace{\underbrace{f_R(3,\ 1,\ 0)}_{1} . \underbrace{f_R(3,\ 1,\ 1)}_{1}}_{1.1\ =\ 1}]$, et $si(1) = 1$

III. $si\,[\underbrace{\underbrace{f_R(3,\ 1,\ 0)}_{1} . \underbrace{f_R(3,\ 1,\ 1)}_{1} . \underbrace{f_R(3,\ 1,\ 2)}_{0}}_{1\ .\ 1\ .\ 0\ =\ 0}]$, et $si(0) = 0$

$$\begin{aligned} MB(3,\ 1) &= si(1) + si(1) + si(0) \\ &= 1 + 1 + 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

2 est bien la plus petite valeur de x, $x \le 3$ tel que $3+1 = 2.x$.

Q u e s t i o n s :

146. Décrire à l'aide d'une fonction de type MB, la fonction $PER(x_1)$ qui calcule la partie entière de la racine carrée de x_1.

Ex. PER(1) = 1
PER(2) = 1
PER(3) = 1
PER(4) = 2
PER(5) = 2
⋮

Suggestion: Utiliser l'information suivante: $R(x_1,\ x)$: $x_1 < (x+1)^2$

147. Décrire à l'aide d'une fonction de type MB, la fonction $PEF(x_1,\ x_2)$ qui calcule la partie entière de la fraction x_1/x_2

Ex. PEF(1, 1) = 1
PEF(2, 1) = 2
PEF(1, 2) = 0
PEF(7, 3) = 2
⋮

Suggestion: Utiliser l'information suivante:

$R(x_1, x_2, x): (x_1 < x_2.(x+1)) \vee (x_2 = 0))$

Pour clore cette partie relative aux fonctions et relations récursives primitives, nous proposons deux exemples. Ils concernent la propriété "être un nombre premier". Le rôle central que joue cette propriété dans la numérotation de Gödel et dans l'arithmétisation de la syntaxe a motivé notre choix.

1] La propriété ETRE UN NOMBRE PREMIER [NP] est une RPR.

Analyse naïve: Si x est un nombre premier, x est différent de 0 et de 1, et quels que soient les nombres x_1 et x_2, $x_1 \leq x$, $x_2 \leq x$, on ne peut avoir à la fois

$x = x_1.x_2$ et

il n'est pas le cas que $[(x_1 = 1)$ ou $(x_2 = 1)]$

De manière plus formelle, les conditions attachées à cette propriété peuvent être représentées de la manière suivante:

$$NP(x): \underset{x_1 \leq x}{(\forall x_1)}\underset{x_2 \leq x}{(\forall x_2)}[\ (\sim(x=1) \wedge \sim(x=0)) \wedge \sim(x=x_1.x_2 \wedge \sim((x_1=1) \vee (x_2=1)))]$$

La quantification bornée, les relations et opérations qui apparaissent dans cette expression ont toutes été définies précédemment comme primitives récursives. La relation NP(x) est donc une RPR et nous poserons f_{NP} sa FRP associée.

2] La fonction $f_p(x)$ qui calcule le x+1 ème nombre premier est une FRP.

Analyse naïve:

Cette fonction, pour la valeur x = 0, doit avoir la valeur 2. De plus, quel que soit a, la valeur $f_p(a+1)$ doit posséder la propriété suivante:

a] être un nombre premier

b] être plus grand que $f_p(a)$

c] être le plus petit nombre premier plus grand que $f_p(a)$

La condition a] est associée à la FRP $f_{NP}(x)$

La condition b] est associée à la FRP $f_>(x_1, x_2)$

Quant à la condition c], elle exige une borne supérieure afin de pouvoir disposer de la fonction de minimalisation bornée. Connaissant que, pour tout nombre premier n, l'addition d'une unité au produit de celui-ci avec <u>tous</u> ses prédécesseurs, est un nombre premier plus grand que le nombre premier n, nous choisirons ce résultat comme borne supérieure. Nous pouvons représenter cette borne supérieure comme suit:

$$[PRO(f_p(q))+1]_{q\leq a}$$

Nous pouvons dès lors inscrire la fonction $f_p(x)$:

$$f_p(x) : \begin{cases} f_p(0) = 2 \\ f_p(a+1) = \text{le plus petit } n,\ n<[PRO(f_p(q))]_{q\leq a}+1 \end{cases}$$

tel que: n est un nombre premier et
n est plus grand que $f_p(a)$

L'inscription formelle en est la suivante:

$$f_p(x) : \begin{cases} f_p(0) = S(S(Z(0))) \\ f_p(a+1) = m[n<[PRO(f_p(q))]_{q\leq a}+1](f_R(f_p(a), n)) \end{cases}$$

avec $f_R(x_1, x_2)$, la fonction caractéristique associée à la relation *x_2 est un nombre premier et x_2 est plus grand que x_1:* $NB(x_2)\wedge(x_2>x_1)$

Il est temps de conclure cette partie qui concerne les fonctions récursives primitives. Nous le ferons en proposant une définition et en inscrivant quelques remarques.

DEFINITION 40 - -fonctions récursives primitives- Toute fonction définie par les clauses 1-3, les clauses inductives 4-5 et les règles dérivées 1-9 est une fonction récursive primitive, et rien d'autre n'est une telle fonction, sinon par ce qui précède.

R e m a r q u e s.

Les relations sont des sous-ensembles de l'ensemble produit $\underbrace{N\times\ldots\times N}_{n \text{ fois}}$ pour un n approprié.

Lorsque nous agissons avec des relations et des opérations logiques qui s'y appliquent, il est nécessaire de vérifier que l'on dispose bien d'un nombre correct d'arguments. Si R est une relation n-aire, $R\subseteq\underbrace{N\times\ldots\times N}_{n \text{ fois}}$

Dans les pages précédentes, nous avons mis en évidence une démarche de la pensée qui avait pour objectif de cerner de manière systématique et constructive le domaine des fonctions calculables. Peut-on admettre maintenant que l'ensemble des FRP coïncide avec celui des fonctions calculables?

Le raisonnement suivant répond par la négative.

La numérotation de Gödel rend possible d'ordonner l'ensemble des FRP d'une seule variable.

Soit $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., $f_n(x)$,... la suite ordonnée de ces FRP

Soit g(x), la fonction ainsi définie:

$g: N \rightarrow N$, $g(x) = S(f_x(x))$ $[f_x(x)+1]$

Bien que calculable, la fonction g n'est pas récursive primitive. Pour le montrer, imaginons l'hypothèse suivante: g(x) est une FRP.

Cette fonction est une fonction d'une variable. Sous l'hypothèse absurde qu'elle est une FRP, elle est donc dans la liste ordonnée des fonctions ne possédant qu'une variable. Elle est pour un indice k particulier $f_k(x)$. Et par définition de g(x), $f_k(x) = S(f_x(x))$, quelle que soit la valeur de la variable x.

Mais pour x = k, nous obtenons un résultat contradictoire. En effet :

$$f_k(k) = S(f_k(k)) \quad [f_k(k) = f_k(k)+1]$$

La valeur de $f_k(k)$ serait égale à son successeur.

Bien que calculable, la fonction g(x) n'est pas une fonction récursive primitive .

Il est donc nécessaire d'élargir l'ensemble des FRP à un ensemble plus large: l'ensemble des fonctions récursives générales [FRG].

4. LES FONCTIONS RECURSIVES GENERALES

Il existe donc des fonctions calculables de manière effective qui ne sont pas des FRP. Il est cependant possible d'étendre la classe des FRP à une classe plus large: la classe des fonctions récursives générales, FRG. Pour réaliser cette expansion, il est nécessaire d'ajouter aux clauses inductives, une opération nouvelle; cette dernière consiste dans une généralisation de l'opération de minimalisation bornée.

Abordons cette nouvelle opération par le biais d'un exemple:

soit la relation R,

$R(x, z): (z+1)^2 > x$

Pour tout x, $x \in N$, il existe des z différents, $z \in N$, qui valident cette relation. Intéressons-nous plus particulièrement au plus petit z [μz], qui pour chaque x, valide cette relation:

x :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
μz :	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	

La relation $R(x,z)$ est récursive; soit f_R sa fonction récursive associée: $f_R(x, z)$.

Dire d'une relation qu'elle est validée par deux valeurs particulières x et z, c'est reconnaître que sa fonction récursive associée est, pour ces deux valeurs, égale à zéro :

$$f_R(x, z) = 0$$

Par rapport à cet exemple particulier, l'opération de minimalisation généralisée introduit la fonction g(x) suivante comme une fonction récursive:

$$g(x) = \mu z \, (f_R(x, z) = 0)$$

R e m a r q u e s .

La fonction g(x) calcule, quel que soit x, le plus petit z, s'il existe, tel que $f_R(x, z) = 0$

Aucune limite supérieure n'est associée à z.

De manière plus explicite, la fonction g(x) calcule la partie entière de la racine carrée de x.

Une condition fondamentale est associée à cette nouvelle opération: quel que soit x, il existe au moins un z tel que $(z+1)^2 > x$. Cette condition est essentielle pour garantir la nature d'"effectivité" de la fonction.

D'une manière plus générale, si h(x, z) est une fonction récursive, et si $(\forall x)(\exists z)(h(x, z) = 0)$, alors
$g(x) = \mu z(h(x, z) = 0)$ est une fonction récursive.

Cette opération de minimalisation a permis de définir, à partir d'une fonction récursive à deux variables, une fonction récursive d'une seule variable.

Proposons maintenant une définition plus générale de cette opération et ajoutons-la aux clauses inductives déjà exposées.

Clause inductive

6) L'opération de MINIMALISATION GENERALISEE [MG]

Soit $f(x_1, \ldots, x_n, x)$ une fonction récursive à n+1 variables telle que pour tout n-uple de valeurs $< x_1, \ldots, x_n >$, il existe x tel que $f(x_1, \ldots, x_n, x) = 0$. Il s'agit de la condition d'"effectivité":

$$[(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)(\exists x)(f(x_1, \ldots, x_n, x) = 0)]$$

S'il existe plusieurs x de cette sorte, appelons μx le plus petit d'entre eux. Alors, la fonction $g(x_1,\ldots, x_n) = \mu x(f(x_1,\ldots, x_n, x) = 0)$ est une fonction récursive définie par l'opération MG.

R e m a r q u e s.

Lorsqu'on utilise l'opération MG, il est indispensable de s'assurer que la condition d'"effectivité" est satisfaite. Nous ne disposons malheureusement pas d'un algorithme décidable permettant de déterminer dans tous les cas si cette condition est satisfaite.

L'opération MG permet de définir à partir d'une fonction récursive à n+1 variables, une fonction récursive de n variables.

Nous nous intéressons à des fonctions définies sur les nombres entiers [$N \times N \times \ldots \times N \longrightarrow N$]. Si le domaine de définition d'une fonction est la totalité du produit cartésien $N \times \ldots \times N$, on parle alors de *fonction totale*. Si son domaine de définition est un sous-ensemble au sens strict du produit cartésien, on l'appelle une *fonction partielle*.
$h(x) = x^2$ est une fonction totale.
$g(x) = \mu z(z^2 - x = 0)$ est une fonction partielle.
L'opération de minimalisation associe à chaque fonction totale h(x, z), une fonction partielle g(x).

Q u e s t i o n s :

148. La relation $R(x_1, x_2, x)$ suivante entre-t-elle dans le champ de la condition d'"effectivité"?
$R(x_1, x_2, x) : (x+1).x_2 > x_1$

149. Soit $f(x_1, x_2, x) =_{df} (x_1+x_2) \dot{-} x$
calculer la valeur de $g(x_1, x_2) = \mu x(f(x_1, x_2, x) = 0)$

pour x_1	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3
x_2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

A l'aide de cette nouvelle opération de minimalisation, il est dès lors possible de définir l'ensemble des fonctions récursives générales.

DEFINITION 41 - Toute fonction définie par les clauses initiales 1-3 [pp. 95-96], par les clauses inductives 4-5 [pp. 96 et 98] et par la clause inductive 6 est une fonction récursive générale, et rien d'autre n'est une telle fonction, sinon par ce qui précède.

-fonctions récursives générales-

L'ensemble des fonctions récursives générales est de plus grande extension que celui des fonctions primitives. Ce nouvel ensemble réunit-il toutes les fonctions calculables?

> Il est impossible,..., de justifier par une démonstration véritable la réponse affirmative qui semble s'imposer, et on est réduit à présenter une pluralité d'arguments convergents. [Martin 1964: 141-142]

Cette pluralité d'arguments consiste essentiellement en la thèse généralisée de Church.

A travers ces quelques pages, nous nous sommes efforcé de donner de la notion de fonction récursive une idée aussi claire et opératoire que possible. Il est cependant nécessaire d'ajouter que la théorie des fonctions récursives est bien plus complexe et plus riche que ce que nous avons exposé. Le lecteur curieux trouvera dans les ouvrages suivants des exposés plus complets de cette théorie [Boolos 1985; Dalen 1983; Grzegorczyk 1974; Kleene 1971; Martin: 1964; Monk 1976].

5. 'REPRESENTABILITE' ET 'DEFINISSABILITE' DES FONCTIONS RECURSIVES

En définissant la notion de système arithmétique minimal, nous avons précisé cinq conditions fondamentales qu'on est en droit d'exiger d'une formalisation de l'arithmétique. L'une des conditions à satisfaire nous concerne plus particulièrement ici. Il s'agit de celle qui exige que, *si E est un ensemble décidable de nombres naturels, E est représentable dans le système* S^a. Dans ce contexte, rappelons deux définitions.

> Soit E un ensemble de nombres naturels. On dit que E est *représentable* en S^a s'il existe une ebf de S^a, de la forme A(v) et telle que, quel que soit n, n∈E,
>
> $n \in E$ ssi $\vdash_{S^a} A(\underline{n})$ [Déf. 37]
>
> Soit A(v), une ebf de S^a qui contient la variable libre v. On appelle *fonction caractéristique* de A(v), la fonction f(n) définie comme suit:
>
> $f(n) = 0$ ssi $\vdash_{S^a} A(\underline{n})$ [Déf. 36]

La propriété de décidabilité d'un ensemble de nombres naturels est associée à la notion de fonction, et plus précisément à celle de fonction effectivement calculable. A cet égard, nous disposons d'un outil efficace: l'ensemble des fonctions récursives. Nous l'utiliserons en posant ce qui suit: un ensemble E de nombres naturels est récursif si et seulement si il existe une fonction récursive f telle que pour chaque n, $n \in E$ ssi $f(n) = 0$.

Par ce biais, nous disposons d'un procédé effectif permettant de déterminer si, pour un nombre n donné, celui-ci appartient ou non à l'ensemble E. De ~~cette manière, tout ensemble récursif est décidable. Dès lors, pour construire~~ un ensemble décidable, on passera par une fonction récursive. Il suffira donc que toute fonction récursive soit représentable dans S^a pour que l'ensemble E le soit également. Seulement, la définition de 'représentable' qui suffisait avant d'avoir construit le système S^a n'est plus assez forte. D'une part nous avons maintenant affaire à des fonctions de plus d'une variable. Ensuite, poser $n \in E$ ssi $f(n) = 0$ ssi $\vdash_{Sa} A(\underline{n})$ permet bien d'inférer que si $n \notin E$, alors $\nvdash_{Sa} A(\underline{n})$, mais comme S^a n'est pas catégorique, on ne sait pas si $n \notin E$ conduit à $\vdash_{Sa} \sim A(\underline{n})$. Enfin, nous avons jusqu'alors volontairement ignoré le problème de l'unicité de la valeur d'une fonction. Tout ceci nous engage à faire appel à une notion plus forte que celle de 'représentabilité': la notion de 'définissabilité'.

DEFINITION 42 - -Définissabilité- Une fonction f à k éléments est *définissable* dans un système formel S s'il existe une ebf $A(v_1,\ldots, v_k, v_{k+1})$ telle que pour tout n-uple de nombres $<n_1,\ldots, n_k>$ on ait

1) $f(n_1,\ldots, n_k) = n_{k+1} \Rightarrow \vdash_S A(\underline{n}_1,\ldots, \underline{n}_k, \underline{n}_{k+1})$

2) $f(n_1,\ldots, n_k) \neq n_{k+1} \Rightarrow \vdash_S \sim A(\underline{n}_1,\ldots, \underline{n}_k, \underline{n}_{k+1})$

3) $\vdash_S (\forall v_1)\ldots(\forall v_k)(\forall v_{k+1})[A(v_1,\ldots, v_k, v_{k+1}) \supset (A(v_1,\ldots, v_k, v_{k+2}) \supset (v_{k+1} = v_{k+2}))]$

clause d'unicité

Il s'agit de montrer maintenant que toute fonction récursive est définissable dans S^a.

METATHEOREME 37 - Toute fonction récursive est définissable dans S^a.

La démonstration consiste à montrer que chacune des fonctions initiales est définissable, et que les trois opérations de substitution, de récurrence et de minimalisation généralisée conservent cette propriété. Dorénavant, pour simplifier la lecture nous ne distinguerons plus graphiquement les signes de S^a et ceux de l'arithmétique, hormis les numéraux.

METATHEOREME 37.1 - La fonction ZERO est définissable dans S^a.

Il faut prouver qu'il existe une ebf $A(v_1, v_2)$ telle que

1) pour tout m, si z(m) = 0 alors $\vdash_{Sa} A(\underline{m}, \underline{0})$

2) pour tout m, si z(m) ≠ 0 alors $\vdash_{Sa} \sim A(\underline{m}, \underline{0})$

3) $\vdash_{Sa} (\forall v_1)(\forall v_2)(\forall v_3)[A(v_1, v_2) \supset (A(v_1, v_3) \supset (v_2 = v_3))]$

Démonstrations

Définition de l'ebf A:

$$A(v_1, v_2) =df\ (v_1 = v_1) \wedge (v_2 = 0)$$

Pour tout nombre m, la fonction z prend valeur, soit n celle-ci: z(m) = n. Dans le contexte de nombres n et m, A s'écrit ainsi :

$$A(\underline{m}, \underline{n}) = (\underline{m} = \underline{m}) \wedge (\underline{n} = \underline{0})$$

1) si n = 0, c'est-à-dire quand z(m) = 0, il faut prouver que:

$$\vdash_{Sa} (\underline{m} = \underline{m}) \wedge (\underline{0} = \underline{0})$$

1	$\mid \underline{m} = \underline{m}$	=i
2	$\mid \underline{0} = \underline{0}$	=i
3	$\mid (\underline{m} = \underline{m}) \wedge (\underline{0} = \underline{0})$	1, 2, $\wedge$ i

2) si n≠ 0, c'est-à-dire quand z(m) ≠ 0, il faut prouver que:

$$\vdash_{Sa} \sim[(\underline{m} = \underline{m}) \wedge (\underline{n} = \underline{0})]$$

1	$\mid\ \mid (\underline{m} = \underline{m}) \wedge (\underline{n} = \underline{0})$	hyp.
2	$\mid\ \mid \underline{n} = \underline{0}$	1, $\wedge$e
3	$\mid\ \mid \sim(\underline{n} = \underline{0})$	n ≠ 0, Mth. 34.3
4	$\mid \sim[(\underline{m} = \underline{m}) \wedge (\underline{n} = \underline{0})]$	1, 2, 3, ~i

3) Il faut encore prouver la troisième condition.

$$\vdash_{Sa} (\forall v_1)(\forall v_2)(\forall v_3)[((v_1 = v_1) \wedge (v_2 = \underline{0})) \supset (((v_1 = v_1) \wedge (v_3 = \underline{0})) \supset (v_2 = v_3))]$$

1	$\mid\ \mid (v_1 = v_1) \wedge (v_2 = \underline{0})$	hyp.
2	$\mid\ \mid\ \mid (v_1 = v_1) \wedge (v_3 = \underline{0})$	hyp.
3	$\mid\ \mid\ \mid (v_1 = v_1) \wedge (v_2 = \underline{0})$	1, reit.
4	$\mid\ \mid\ \mid v_2 = \underline{0}$	3, $\wedge$e
5	$\mid\ \mid\ \mid v_3 = \underline{0}$	2, $\wedge$e
6	$\mid\ \mid\ \mid v_2 = v_3$	4, 5, =e
7	$\mid\ \mid ((v_1 = v_1) \wedge (v_3 = \underline{0})) \supset (v_2 = v_3)$	2-6, $\supset$ i
8	$\mid ((v_1 = v_1) \wedge (v_2 = \underline{0})) \supset (((v_1 = v_1) \wedge (v_3 = \underline{0})) \supset (v_2 = v_3))$	1-7, $\supset$i
9	$\mid (\forall v_1)(\forall v_2)(\forall v_3)[----]$	8, 3xGEN

METATHEOREME 37.2 - La fonction SUCCESSEUR est définissable dans S^a.
Il faut montrer qu'il existe une ebf $A(v_1, v_2)$ telle que:

1) pour tout m, si S(m) = m+1, donc si n = m+1
$\vdash_{S^a} A(\underline{m}, \underline{n})$

2) pour tout m, si S(m) ≠ m+1, donc si n ≠ m+1
$\vdash_{S^a} \sim A(\underline{m}, \underline{n})$

3) $\vdash_{S^a} (\forall v_1)(\forall v_2)(\forall v_3)[(v_1^* = v_2) \supset ((v_1^* = v_3) \supset (v_2 = v_3))]$

Démonstrations

Définition de l'ebf A:

$A(v_1, v_2) =\text{df } v_1^* = v_2$

$A(\underline{m}, \underline{n}) = \underline{m}^* = \underline{n}$

1) Si n = m+1, c'est-à-dire quand S(m) = n+1, il faut prouver que:

$\vdash_{S^a} (\underline{m}^* = \underline{n})$

1	$\underline{n} = \underline{m+1}$	n = m+1, Mth. 34.2
2	$\underline{m+1} = \underline{m}^*$	Mth. 34.1
3	$\underline{m}^* = n$	1, 2, =e

2) Si n ≠ m+1, c'est-à-dire quand S(m) ≠ m+1, il faut prouver que:

$\vdash_{S^a} \sim(\underline{m}^* = \underline{n})$

1	$\sim(\underline{m+1} = \underline{n})$	m+1 ≠ n , Mth. 34.3
2	$\underline{m}^* = \underline{m+1}$	Mth. 34.1
3	$\sim(\underline{m}^* = \underline{n})$	2, 1, règle rem

3) Troisième condition

$\vdash_{S^a} (\forall v_1)(\forall v_2)(\forall v_3)[(v_1^* = v_2) \supset ((v_1^* = v_3) \supset (v_2 = v_3))]$

1	$v_1^* = v_2$	hyp.
2	$v_1^* = v_3$	hyp.
3	$v_1^* = v_2$	1, reit.
4	$v_2 = v_3$	2, 3, =e
5	$(v_1^* = v_3) \supset (v_2 = v_3)$	2-4, ⊃ i
6	$(v_1^* = v_2) \supset ((v_1^* = v_3) \supset (v_2 = v_3))$	1-5, ⊃ i
7	$(\forall v_1)(\underline{\forall} v_2)(\forall v_3)[----]$	6, 3xGEN

METATHEOREME 37.3 La fonction PROJECTION est définissable dans S^a.
Définition de l'ebf A:

$$A(v_1,\dots, v_k, v_{k+1}) =_{df} (v_1 = v_1)\wedge \dots\wedge (v_k = v_k)\wedge(v_{k+1} = v_i)$$

Pour des nombres $n_1,\dots, n_k$ donnés, la fonction P_i^k prend une valeur, soit n celle-ci:

$$P_i^k (n_1,\dots, n_k) = n$$

Il faut montrer que :

1) Si $P_i^k(n_1,\dots, n_k) = n_i$, donc si $n = n_i$
   $\vdash_{S^a} A(\underline{n}_1,\dots, \underline{n}_k, \underline{n})$

2) Si $P_i^k (n_1,\dots, n_k) \neq n_i$, donc si $n \neq n_i$
   $\vdash_{S^a} {\sim}A(\underline{n}_1,\dots, \underline{n}_k, \underline{n})$

3) $\vdash_{S^a}(\forall v_1)\dots(\forall v_k)(\forall v_{k+1})(\forall v_{k+2})[A(v_1,\dots, v_k, v_{k+1})\supset((A(v_1,\dots, v_k , v_{k+2})\supset (v_{k+1} = v_{k+2}))]$

Q u e s t i o n

150. Démontrer que la fonction PROJECTION est définissable dans S^a.

Les preuves de la conservation de la propriété de 'définissabilité' dans S^a pour les opérations de substitution, de récurrence et de minimalisation généralisée sont longues. Nous nous contenterons d'illustrer ou d'esquisser le procédé démonstratif de certaines d'entre elles. Des développements plus complets peuvent être trouvés notamment dans Mendelson [1979], Kleene [1980].

METATHEOREME 37.4 - L'opération de SUBSTITUTION conserve dans S^a la propriété de 'définissabilité'.

Nous caricaturerons la démonstration en ne considérant que deux fonctions à un seul argument: f(x) et h(x). Cette manière de procéder conserve l'esprit de la démonstration et a l'avantage d'en simplifier la forme.

Il s'agit donc de montrer que si f(x) et h(x) sont deux fonctions récursives définissables, alors g(x) = f(h(x)) est une fonction récursive définissable.

Affirmer que f est une fonction récursive définissable c'est admettre qu'il existe une ebf $A(v_1, v_2)$ telle que pour tout nombre n_1

* si $f(n_1) = n_2$ alors $\vdash_{Sa} A(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$

** si $f(n_1) \neq n_2$ alors $\vdash_{Sa} \sim A(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$

*** si $(\forall v_1)(\forall v_2)(\forall v_3)[A(v_1, v_2) \supset (A(v_1, v_3) \supset (v_2 = v_3))]$

Affirmer que h est une fonction récursive définissable, c'est admettre qu'il existe une ebf $B(v_1, v_2)$ telle que pour tout nombre n_1:

□ si $h(n_1) = n_2$ alors $\vdash_{Sa} B(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$

□□ si $h(n_1) \neq n_2$ alors $\vdash_{Sa} \sim B(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$

□□□ $(\forall v_1)(\forall v_2)(\forall v_3)[B(v_1, v_2) \supset (B(v_1, v_3) \supset (v_2 = v_3))]$

Sur la base de ces données, il faut montrer que l'on sait construire une ebf $C(v_1, v_2)$ telle que pour tout nombre n_1 :

$$\left.\begin{array}{l} + \text{ Si } g(n_1) = n_2 \text{ alors } \vdash_{Sa} C(\underline{n}_1, \underline{n}_2) \\ ++ \text{ Si } g(n_1) \neq n_2 \text{ alors } \vdash_{Sa} \sim C(\underline{n}_1, \underline{n}_2) \end{array}\right\}$$

avec, dans le contexte de l'opération de substitution: $n_2 = f(h(n_1))$, c'est-à-dire $g(n_1) = f(h(n_1))$

+++ $(\forall v_1)(\forall v_2)(\forall v_3)\ [C(v_1, v_2) \supset (C(v_1, v_3) \supset (v_2 = v_3))]$

Avant de poursuivre cette démarche établissons un lemme.

LEMME I - Si j est une fonction à un argument et s'il existe une ebf $D(v_1, v_2)$ qui satisfasse aux conditions :

. $\vdash_{Sa}(\forall v_1)(\forall v_2)(\forall v_3)[D(v_1, v_2) \supset (D(v_1, v_2) \supset (v_2 = v_3))]$

.. $\vdash_{Sa} D(\underline{n}_1, \underline{j(n_1)})$ quel que soit le nombre n_1

alors $D(v_1, v_2)$ satisfait aux deux premières conditions de la 'définissabilité', c'est-à-dire :

≠ Si $j(n_1) = n_2$ alors $\vdash D(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$

≠≠ si $j(n_1) \neq n_2$ alors $\vdash \sim D(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$

<u>Démonstration</u>

Supposons les deux conditions .) et ..) réalisées; il en résulte que:

1) Si $j(n_1) = n_2$ alors $\vdash_{Sa} \underline{j(n_1)} = \underline{n}_2$ Mth. 34.2

Opérons dans ..) la substitution suivante: $\underline{j(n_1)} / \underline{n}_2$

On obtient alors ≠ : si $j(n_1) = n_2$ alors $\vdash_{Sa} D(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$

2) Si $j(n_1) \neq n_2$ alors $\vdash_{Sa} \sim(\underline{j(n_1)} = \underline{n}_2)$ Mth. 34.2 *

Opérons dans .) la substitution suivante:

$v_1 / \underline{n}_1$, $v_2 / \underline{j(n_1)}$, $v_3 / \underline{n}_2$, en éliminant les quantificateurs:

1	$(\forall v_1)(\forall v_2)(\forall v_3)[D(v_1, v_2) \supset (D(v_1, v_3) \supset (v_2 = v_3))]$	.
2	$D(\underline{n}_1, \underline{j(n_1)}) \supset (D(\underline{n}_1, \underline{n}_2) \supset (\underline{j(n_1)} = \underline{n}_2))$	1, sub, $\forall$e
3	$D(\underline{n}_1, \underline{j(n_1)})$	..
4	$D(\underline{n}_1, \underline{n}_2) \supset (\underline{j(n_1)} = \underline{n}_2))$	3, 2, $\supset$ e
5	$\sim(\underline{j(n_1)} = \underline{n}_2) \supset \sim D(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$	4, contrap.
6	$\sim(\underline{j(n_1)} = \underline{n}_2)$	*
7	$\sim D(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$	6, 5, $\supset$ e

On obtient bien ## : si $j(n_1) \neq n_2$ alors $\vdash_{Sa} \sim D(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$.

Avant d'entreprendre la preuve du Mth. 37.4, il est utile de transformer la règle d'élimination d'un quantificateur existentiel pour obtenir la règle dite *règle de choix*, C. Celle-ci permet de présenter une démonstration plus élégante. La règle d'élimination du quantificateur $\exists$ a la forme suivante:

| $(\exists v)A(v)$
| | v | $A(v)$
| | | $\vdots$
| | | B
| B

Avec l'interdiction de réitérer une ebf qui contient v libre et à condition que B ne contienne pas v libre.

Si on élargit le système S en un système S^+ en ajoutant de nouvelles constantes d'objets $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ et si a est l'une de ces constantes, on peut utiliser la règle de transformation suivante:

Règle C : Si $\Gamma \vdash_S (\exists v)A(v)$ et si $\Gamma, A(a) \vdash_{S^+} B$ alors $\Gamma \vdash_S B$, à condition que B ne contienne pas a [Rosser 1953: 128].

Prouvons maintenant que si $f(x)$ est définissable par $A(w_1, w_2)$, et $h(x)$ par $B(u_1, u_2)$, alors $g(x) = f(h(x))$ est définissable par l'ebf $C(v_1, v_2)$: $C(v_1, v_2) =df\ (\exists v_k)(B(v_1, v_k) \wedge A(v_k, v_2)$.

Dans le contexte de l'opération de substitution, les fonctions h et f s'articulent ainsi: $f(h(x))$

posons ce qui suit :

$$h(n_1) = i \quad \text{et } f(i) = n_2$$

on a alors

$$f(h(n_1)) = n_2$$

et $\quad g(n_1)$ est $f(h(n_1))$

Prouvons tout d'abord la condition ..), c'est-à-dire, $C(\underline{n}_1, \underline{g(n_1)})$ qui, par la définition précédente est :

$(\exists v_k)(B(\underline{n}_1, v_k) \wedge A(v_k , \underline{g(n_1)})$ ou écrit en fonction de f et h :

$(\exists v_k)(B(\underline{n}_1, v_k) \wedge A(v_k, \underline{f(h(n_1))}))$

1	$B(\underline{n}_1, \underline{i})$	h est définissable, $h(n_1) = i$ □
2	$\underline{h(n_1)} = \underline{i}$	$h(n_1) = i$, Mth. 34.2
3	$A(\underline{i}, \underline{n}_2)$	f est définissable, $f(i) = n_2$ *
4	$\underline{f(i)} = \underline{n}_2$	$f(i) = n_2$, Mth. 34.2
5	$A(\underline{i}, \underline{f(i)})$	3, 4, rem
6	$A(\underline{i}, \underline{f(h(n_1))})$	2, 5, rem
7	$B(\underline{n}_1, \underline{i}) \wedge A(\underline{i}, \underline{f(h(n_1))})$	1, 4, $\wedge$i
8	$(\exists v_k)(B(\underline{n}_1, v_k) \wedge A(v_k , \underline{f(h(n_1))}))$	7, $\exists$i, i / v_k
9	$(\exists v_k)(B(\underline{n}_1, v_k) \wedge A(v_k, \underline{g(n_1)}))$	8, $\underline{f(h(n_1))}$ est $\underline{g(n_1)}$
10	$C(\underline{n}_1, \underline{g(n_1)})$	9, déf. de C.

En prouvant de plus la clause d'unicité, c'est-à-dire :

.) $\vdash_{Sa} (\forall v_1)(\forall v_2)(\forall v_3)[(C(v_1, v_2) \supset (C(v_1, v_3) \supset (v_2 = v_3))]$

on aura ainsi démontré toutes les conditions que g(x) doit remplir pour être définissable.

Preuve de la clause d'unicité

Par définition de l'ebf C, cette clause s'écrit ainsi:

$$\vdash_{Sa} (\forall v_1)(\forall v_2)(\forall v_3)[(\exists v_k)(B(v_1, v_k) \wedge A(v_k, v_2)) \supset ((\exists v_k)(B(v_1, v_k) \wedge A(v_k, v_3)) \supset (v_2 = v_3))]$$

Posons les abréviations suivantes:

P =df $(\forall v_1)(\forall v_2)(\forall v_3)(A(v_1, v_2) \supset (A(v_1, v_3) \supset (v_2 = v_3)))$

Q =df $(\forall v_1)(\forall v_2)(\forall v_3)(B(v_1, v_2) \supset (B(v_1, v_3) \supset (v_2 = v_3)))$

$M(v_k) =_{df} B(v_1, v_k) \wedge A(v_k, v_2)$

$N(v_k) =_{df} B(v_1, v_k) \wedge A(v_k, v_3)$

Sur la base de ces abréviations, il faut donc prouver:

$$\vdash_{S^a} (\forall v_1)(\forall v_2)(\forall v_3)[(\exists v_k)M(v_k) \supset ((\exists v_k)N(v_k) \supset (v_2 = v_3))]$$

Pour ce faire, utilisons un nouveau lemme.

LEMME II - Soit $S^{a+} = S^a + \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$

Soit $S^{a++} = S^{a+} + \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$

Alors, si a est un a_i quelconque et b un b_i quelconque,

$M(a), (\exists v_k)N(v_k), N(b) \vdash_{S^{a++}} v_2 = v_3$

Démonstration du lemme

1	$B(v_1, a) \wedge A(a, v_2)$	$M(a)$	
2	$(\exists v_k)[B(v_1, v_k) \wedge A(v_k, v_3)]$	$(\exists v_k)N(v_k)$	prémisses
3	$B(v_1, b) \wedge A(b, v_3)$	$N(b)$	
4	v_k | $B(v_1, v_k) \wedge A(v_k, v_3)$	Hyp. $\exists e$	
5	$B(v_1, a)$	1, reit, $\wedge e$	
6	$A(a, v_2)$		
7	$B(v_1, b)$	3, reit, $\wedge e$	
8	$A(b, v_3)$		
9	$B(v_1, a) \supset (B(v_1, b) \supset (a = b))$	Q, $\forall e$, v_2/a, v_3/b	
10	$B(v_1, b) \supset (a = b)$	9, 5, $\supset e$	
11	$a = b$	10, 7, $\supset e$	
12	$A(b, v_2)$	6, 11, rem	
13	$A(b, v_2) \supset (A(b, v_3) \supset (v_2 = v_3))$	P, $\forall e$, v_1/b	
14	$A(b, v_3) \supset (v_2 = v_3)$	13, 12, $\supset e$	
15	$v_2 = v_3$	8, 14, $\supset e$	
16	$v_2 = v_3$	2, 4-15, $\exists e$	

Nous avons ainsi montré que:

1. $M(a), (\exists v_k)N(v_k), N(b) \vdash_{S^{a++}} v_2 = v_3$ Lemme II

De plus:

2. $M(a), (\exists v_k)N(v_k), \vdash_{Sa+} (\exists v_k)N(v_k)$ — Mth.: $B, A \vdash A$
3. $\underbrace{M(a), (\exists v_k)N(v_k)}_{\Gamma_1} \vdash_{Sa+} v_2 = v_3$ — 1, 2, règle C
4. $(\exists v_k)M(v_k), (\exists v_k)N(v_k), M(a) \vdash_{Sa+} v_2 = v_3$ — 3, Mth. 1.1
5. $(\exists v_k)M(v_k), (\exists v_k)N(v_k) \vdash_{Sa} (\exists v_k)M(v_k)$ — Mth.: $A, B \vdash A$
6. $\underbrace{(\exists v_k)M(v_k), (\exists v_k)N(v_k)}_{\Gamma_2} \vdash_{Sa} v_2 = v_3$ — 4, 5, Règle C
7. $(\exists v_k)M(v_k) \vdash_{Sa} (\exists v_k)N(v_k) \supset (v_2 = v_3)$ — 6, Mth. 3
8. $\vdash_{Sa} (\exists v_k)M(v_k) \supset ((\exists v_k)N(v_k) \supset (v_2 = v_3))$ — 7, Mth. 3
9. $\vdash_{Sa} (\forall v_1)(\forall v_2)(\forall v_3)$ [----] — 8, 3x GEN

Il s'agit de la clause d'unicité.

L'opération de SUBSTITUTION conserve la propriété de définissabilité. Bien que la démonstration ait été faite en ne considérant que des fonctions f et h à un seul argument, ce résultat reste valide pour un nombre quelconque d'arguments.

METATHEOREME 37.5 - L'opération de RECURRENCE conserve la propriété de définissabilité.

Si f, une fonction à k arguments, est définissable dans S^a par une ebf A à k+1 arguments et si h, une fonction à k+2 arguments, est définissable dans S^a par une ebf B à k+3 arguments, alors la fonction g, à k+1 arguments:

$$g(n_1,\ldots, n_k, n_{k+1}) : \begin{cases} g(n_1,\ldots, n_k, 0) = f(n_1,\ldots, n_k) \\ g(n_1,\ldots, n_k, a+1) = \\ \quad h(n_1,\ldots, n_k, a, g(n_1,\ldots, n_k, a)) \end{cases}$$

est définissable, et il existe donc une ebf C à k+2 arguments qui lui est associée. Nous ne ferons que présenter l'ebf C.

Esquisse d'une construction de l'ebf C.

Présentons tout d'abord un résultat qui sera utile: la β-fonction de Gödel.

Soit $n_1, \ldots, n_k$, une succession de nombres naturels, il existe alors une fonction β et deux nombres naturels m et p tels que:

$\beta(m, p, i) = n_i$ avec $1 \leq i \leq n$.

La fonction β est récursive:

Soit la relation récursive R_1, $R_1(x, y, z) : (y = 0) \vee (y.(z+1) > x)$

et soit $f_{R_1}(x, y, z)$, la fonction récursive qui lui est associée; alors la fonction PED(x, y) est également récursive:

$$PED(x, y) = \mu z(f_{R_1}(x, y, z) = 0)$$

La fonction PED représente la partie entière de la division de x par y. Soit RD une nouvelle fonction récursive: $RD(x, y) = x \dot{-} (PED(x, y).y)$; elle représente le reste de la division de x par y. Sur la base de ce qui précède, la fonction β s'écrit ainsi:

$$\beta(x, y, z) = RD(1+S(z).y, x).$$

De plus, cette fonction β est définissable dans S^a. L'ebf G à quatre arguments qui lui est associée a la forme suivante:

$$G(x, y, z, w) =df\ (\exists v)[(x = ((1+S(z).y).v+w)) \wedge (w < (1+(S(z).y))]$$

[Kleene 1980: § 41 et § 48].

Revenons, avec ce bagage, à l'ebf C qui est associée à la fonction g définie par l'opération de récurrence. Cette fonction $g(n_1, \ldots, n_k, n_{k+1})$ est définissable dans S^a par l'ebf $C(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2})$ telle que:

si $g(n_1, \ldots, n_k, n_{k+1}) = n$ alors $\vdash_{S^a} C(\underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_k, \underline{n}_{k+1}, \underline{n})$

si $g(n_1, \ldots, n_k, n_{k+1}) \neq n$ alors $\vdash_{S^a} \sim C(\underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_k, \underline{n}_{k+1}, \underline{n})$

plus clause d'unicité.

<u>Définition de l'ebf C</u>

$$
\begin{aligned}
& C(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}) =df \\
& \quad (\exists u)(\exists v)[(\exists w)(G(u, v, \underline{0}, w) \wedge A(v_1, \ldots, v_n, w) \wedge \\
& \qquad G(u, v, v_{k+1}, v_{k+2}) \wedge \\
& \qquad (\forall s)((s < v_{k+1}) \supset \\
& \qquad\quad (\exists y)(\exists z)(G(u, v, s, y) \wedge \\
& \qquad\qquad G(u, v, S(s), z) \wedge \\
& \qquad\qquad B(v_1, \ldots, v_n, s, y, z))))]
\end{aligned}
$$