Par hypothèse d'induction on obtient $\vdash_{S^*} B$.
S* est non contradictoire, donc $\nvdash_{S^*} \sim B$.
Et ~B est A, donc $\nvdash_{S^*} A$.

Cas 2] : A est $B \supset C$
Les ebf B et C sont fermées puisque A l'est.

(→) 2.1 $val_I(A) = val_I(B \supset C) = \top$, montrons alors que $\vdash_{S^*} A$.
Passons par la contraposée et supposons que A n'est pas un théorème de S* : $\nvdash_{S^*} A$.
S* étant catégorique relativement à la fermeture, on a $\vdash_{S^*} \sim A$
et donc $\vdash_{S^*} \sim(B \supset C)$ ou encore $\vdash_{S^*} B \wedge \sim C$

Ce qui nous permet d'établir: $\vdash_{S^*} B$ (1)
$\vdash_{S^*} \sim C$ (2)

(1) Par l'hypothèse d'induction nous obtenons $val_I(B) = \top$ (*)

(2) S* étant non contradictoire, il s'ensuit de $\vdash_{S^*} \sim C$
que C n'est pas un théorème de S*: $\nvdash_{S^*} C$
et une fois encore par hypothèse d'induction $val_I(C) = \bot$ (**)
Par (*) et (**), $val_I(B \supset C) = val_I(A) = \bot$.

Ainsi, si $\nvdash_{S^*} A$ alors $val_I(A) = \bot$

DONC, si $val_I(A) = \top$ alors $\vdash_{S^*} A$

(←) 2.2 Supposons que A (qui est $B \supset C$) soit un théorème: $\vdash_{S^*} A$ ou $\vdash_{S^*} B \supset C$, montrons alors que $val_I(A) = \top$.
Etablissons la contraposée. Posons $val_I(A) = \bot$ et montrons que $\nvdash_{S^*} A$.

$val_I(A) = val_I(B \supset C) = \bot$ implique que $val_I(B) = \top$ et $val_I(C) = \bot$

Par hypothèse d'induction on obtient:
$\vdash_{S^*} B$ (*) et $\nvdash_{S^*} C$

S* est catégorique relativement à la fermeture, il s'ensuit donc que $\vdash_{S^*} \sim C$ (**)

Par (*) et (**), on obtient
$\vdash_{S^*} B \wedge \sim C$ et donc $\vdash_{S^*} \sim(B \supset C)$

S^* est non contradictoire, donc $\nvdash_{S^*} (B \supset C)$ et $\nvdash_{S^*} A$.

Ainsi, si $val_I(A) = \perp$ alors $\nvdash_{S^*} A$.

DONC si $\vdash_{S^*} A$ alors $val_I(A) = \top$.

Cas 3]: A est $(\forall v_i)B$ où A est une ebf fermée.
Deux situations sont possibles.

3.1 B ne contient pas v_i libre. B est donc fermée.

$(\rightarrow)$ a) $val_I((\forall v_i)B) = \top$

Une ebf et sa fermeture sont logiquement valides ensemble [Mth. 14], donc on a aussi $val_I(B) = \top$ et par hypothèse d'induction $\vdash_{S^*} B$. Dès lors, en utilisant la règle GEN, on obtient

$\vdash_{S^*} (\forall v_i)B$ donc $\vdash_{S^*} A$.

$(\leftarrow)$ b) $\vdash_{S^*} A$ donc $\vdash_{S^*} (\forall v_i)B$.

Il existe donc une preuve de $(\forall v_i)B$ dans S^*. Poursuivons cette preuve en y ajoutant la ligne qui contient l'ebf B [justification: présence préalable de $(\forall v_i)B$ et $\forall$e].
B est donc aussi un théorème dans S^* : $\vdash_{S^*} B$
et par hypothèse d'induction $val_I(B) = \top$.
Une fois encore le Mth. 14 nous permet d'écrire $val_I((\forall v_i)B) = \top$.

3.2 B contient v_i libre, $B(v_i)$. A étant une ebf fermée, B ne contient que la variable v_i libre. B est donc une des ebf de notre liste [p. 43]
Admettons qu'il s'agit de l'ebf $A_k(v_{i_k})$ $[v_i = v_{i_k}]$.

$(\rightarrow)$ a) $val_I(A) = val_I((\forall v_{i_k})A_k(v_{i_k})) = \top$.

Raisonnons par l'absurde et posons $\nvdash_{S^*} A$.
S^* est catégorique relativement à la fermeture, donc

$\vdash_{S^*} \sim A$ et $\vdash_{S^*} \sim(\forall v_{i_k})A_k(v_{i_k})$ (*)

Mais S^* est une extension de S^∞. On a donc que l'axiome s_k est un théorème de S^∞ et donc de S^*. C'est-à-dire :

$\vdash_{S^*} \sim(\forall v_{i_k})A_k(v_{i_k}) \supset \sim A_k(a_{j_k})$ (**)

Par (*), (**) et MP, on obtient :

$\vdash_{S^*} \sim A_k(a_{j_k})$ (□)

Etant donné que $val_I(A) = val_I((\forall v_{i_k})A_k(v_{i_k})) = \top$ on a en particulier $val_I((A_k(a_{j_k})) = \top$. $A_k(a_{j_k})$ est fermée, donc par hypothèse d'induction, il vient

$\vdash_{S^*} A_k(a_{j_k})$ ($\square\square$)

Les théorèmes ($\square$) et ($\square\square$) feraient que S* serait contradictoire, ce qu'il n'est pas.

Ainsi l'hypothèse absurde $\nvdash_{S^*}$ A est fausse.

DONC si $val_I(A) = val_I((\forall v_i)B) = \top$ alors $\vdash_{S^*}$ A.

($\leftarrow$) b) $\vdash_{S^*}$ A donc $\vdash_{S^*} (\forall v_i)B(v_i)$ (*)

Considérons le schéma d'axiome A4:

$(\forall v_i)B(v_i) \supset B(t)$ si t est libre pour v_i dans $B(v_i)$ (**)

Quel que soit le terme <u>fermé</u> t de S* choisi il est toujours libre pour v_i dans $B(v_i)$. Il s'ensuit que

$\vdash_{S^*} B(t)$ (*), (**), MP

Par hypothèse d'induction, B(t) étant une ebf fermée, $val_I(B(t)) = \top$ pour tout terme fermé de S*. Le terme fermé t étant quelconque, et le choix du domaine des objets Ω permettant de réduire les applications de I aux seuls termes fermés de S*, il s'ensuit que

$val_I((\forall v_i)B(v_i)) = \top$ et donc $val_I(A) = \top$.

Ainsi, si $\vdash_{S^*}$ A alors $val_I(A) = \top$.

L'étude des cas 1], 2] et 3] établit que l'interprétation I est bien un modèle de S* et en raison même du choix du domaine Ω , ce domaine est dénombrable.

IV. Où le métathéorème 28 est enfin démontré, puis utilisé.

<u>Démonstration</u> :

1. I est un modèle dénombrable de S* [III.1 et III.2].
2. S* est une extension de S^∞ qui est lui-même une extension de S^0. I est donc également un modèle dénombrable de S^0.
3. Par construction, tous les théorèmes de S sont des théorèmes de S^0. L'interprétation I est donc aussi un modèle dénombrable de S.
4. S étant un système du premier ordre non contradictoire quelconque, nous avons donc prouvé que:

Tout système du premier ordre S qui est non contradictoire possède un modèle dénombrable.

Q u e s t i o n:

91. Le système L admet-il un modèle dénombrable?

METATHEOREME 29 - Tout système du premier ordre qui admet un modèle admet un modèle dénombrable.
[Théorème dit de Löwenheim-Skolem].

Démonstration: 1. Tout système du premier ordre qui admet un modèle est non contradictoire [Mth. 24].

2. Tout système du premier ordre qui est non contradictoire possède un modèle dénombrable [Mth.28].

R e m a r q u e s

- Le contenu du métathéorème 29 apparaît paradoxal si l'on songe qu'il est possible de formaliser la théorie des nombres réels [c'est un ensemble non dénombrable] dans un système du premier ordre.

- Le métathéorème 29 est très généreusement attribué à Löwenheim-Skolem. Le lecteur curieux qui voudrait retourner aux sources doit s'attendre à quelques surprises. Empruntons à Heijenoort [1971] la traduction anglaise de ces deux résultats:

Theorem 2 - If the domain is at least denumerably infinite, it is no longer the case that a first order fleeing equation is satisfied for arbitrary values of the relative coefficient.
[Heijenoort, 1971, p. 235, trad. Löwenheim, 1915.]

fleeing equation: il s'agit d'une formule qui n'est pas valide, mais qui est cependant n valide pour tout n, $n \in \mathbb{N}$.

first order equation: il s'agit d'une ebf du calcul des prédicats avec identité.

Theorem 2 - Every proposition in normal form either is a contradiction or is already satisfiable in a finite or denumerably infinite domain.
[Heijenoort, 1971, p. 256, trad. Skolem 1919].

contradiction: il s'agit d'une proposition qui n'est pas satisfaisable.
Dire d'une proposition A qu'elle n'est pas satisfaisable signifie que ~A est valide.

La forme normale d'une expression A est la transformée qui consiste en une expression organisée ainsi:

$(\exists x)(\exists y)\ldots(\exists z)(\forall m)(\forall n)\ldots(\forall r)B(x\ldots r)$, l'expression B ne contenant que des variables libres.

- L'essentiel de la démonstration du métathéorème 28 est dû à Henkin. Il s'agit d'une partie de sa thèse de doctorat soutenue en 1947 et publiée en 1949.

- Relativement à la démonstration du métathéorème 28, citons le commentaire suivant:

> *This proof skirts the edge of vicious circularity without quite falling into it. We want to prove that if a formula of [S*] is a theorem then it is true for a certain interpretation; and we then define the interpretation in question as one in which an atomic formula of [S*] is true iff it is a theorem of [S*]. For an atomic formula to be true, on this interpretation, is just for it to be a theorem of [S*]: this is what we mean by "true" (for atomic formulas) for the interpretation in question. [S*] is in fact interpreted in terms of itself. This will probably strike the reader as something of a cheat, especially if he was expecting a more interesting model.*
> [Hunter, 1973, pp. 184-185].

- Un résumé schématique de la démonstration du métathéorème 28 est proposé [p. 53].

9.4 La complétude sémantique de L

METATHEOREME 30 - Le calcul des prédicats [système L] est complet en ce sens que $\models_L A$ alors $\vdash_L A$.

Démonstration: Raisonnons par l'absurde.

Soit une ebf A logiquement valide, telle que $\nvdash_L A$.

Etudions l'extension L' de L ainsi formée:

$$L' = L + {\sim}A \quad ({\sim}A \text{ est axiome}).$$

Le lemme I [p. 35] permet de dire que L' est non contradictoire. Et par le métathéorème 28 nous savons que L' possède un modèle I.

Etant donné que ~A est un axiome de L',

$$\mathrm{val}_I({\sim}A) = \top \qquad \text{et } \mathrm{val}_I(A) = \bot \qquad (*)$$

Mais A est logiquement valide, $\models A$, donc $\mathrm{val}(A) = \top$ (**) dans toutes les interprétations, donc également dans I.

L'hypothèse absurde entraîne une contradiction: (*) et (**).

Toute ebf logiquement valide de L est donc un théorème dans ce système.

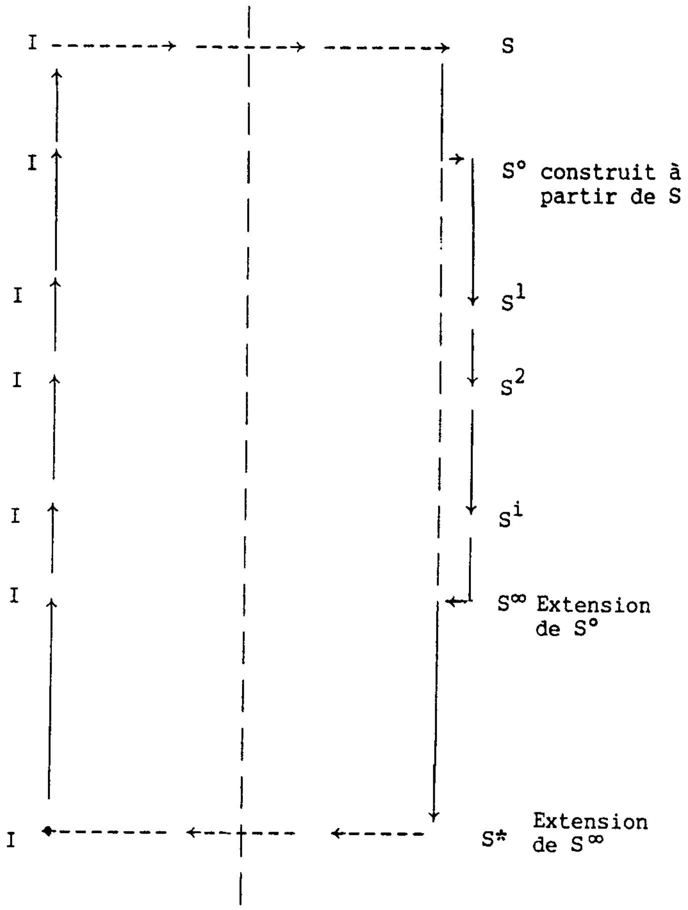
R e m a r q u e

Les deux démonstrations les plus marquantes relativement au métathéorème 30 sont dues à Gödel et Henkin. En 1930, dans sa thèse de doctorat Gödel démontre que tôute ebf valide du calcul des prédicats est un théorème. Il s'agit de la première démonstration de ce résultat. La démarche qu'il propose est quelque peu différente de celle que nous avons suivie. Nous nous sommes largement inspirés de la démonstration de Henkin [1949].

RESUME SCHEMATIQUE DU METATHEOREME 28

THEORIE DES MODELES

THEORIE DE LA PREUVE



Il est montré que cette interprétation est un modèle de S [p. 50, points 1, 2, 3]

Il est montré que cette interprétation est un modèle de S° [p. 50, points 1, 2]

Il est montré que cette interprétation est un modèle de S^∞ [p. 50, points 1, 2]

Construction d'une interprétation I [p. 46, III.1]

Il est démontré que cette interprétation est un modèle dénombrable de S* [p. 47, III.2]

Il est démontré que S° est non contradictoire [p. 43, I.2]

Extensions successives de S°

Il est démontré que S^∞ est non contradictoire [p. 43, II.1]

Il est démontré qu'il EXISTE un système S* non contradictoire et catégorique relativement à la fermeture. [p. 45, II.2 et Mth. 27 p. 40]

10. LA DECIDABILITE

L'enjeu de la décidabilité est important. Pensons au dernier théorème de Fermat: l'équation $x^n+y^n = z^n$ ne possède pas de solution entière pour $n > 2$. Bien que Fermat ait affirmé avoir une preuve de cette proposition, personne depuis lors (≈1637) n'a réussi à démontrer cette proposition, ni sa négation. Envisageons un autre problème: considérons le nombre π dans sa représentation décimale 3, 14159265..., et posons-nous la question suivante: est-il possible de démontrer qu'il existe dans la suite décimale une première position k à partir de laquelle on trouve la suite de chiffres suivante: 2111110111112? Que répondre? L'intérêt de disposer d'un système offrant la garantie qu'il est toujours possible de déterminer si une expression est ou n'est pas un théorème est manifeste.

Leibniz s'était intéressé à l'existence d'une procédure universelle effective susceptible de déterminer, en un nombre d'étapes fini, si une expression est ou n'est pas un théorème. Hilbert dans la fin des années 20 réalise notamment que deux systèmes élémentaires sont décidables. Il s'agit du système élémentaire des prédicats ainsi que d'un système réduit de l'arithmétique. Mais Gödel montre en 1931 que cette propriété n'est pas acquise pour des systèmes un peu plus riches que ceux traités par Hilbert.

> *It is well known that the development of mathematics in the direction of greater precision has led to the formalization of extensive mathematical domains, in the sense that proofs can be carried out according to a few mechanical rules. The most extensive formal systems constructed up to the present time are the system of Principia Mathematica (PM), on the one hand, and, on the other hand, the Zermelo-Fraenkel axiom system for set theory (which has been developed further by J. v. Neumann). Both of these systems are so broad that all methods of proof used in mathematics today can be formalized in them, i.e. can be reduced to a few axioms and rules of inference. It is reasonable therefore to make the conjecture that these axioms and rules of inference are also sufficient to decide all mathematical questions which can be formally expressed in the given systems. ... it will be shown that this is not the case, but rather that, in both of the cited systems, there exist relatively simple problems of the theory of ordinary whole numbers which cannot be decided on the basis of axioms. This situation does not depend upon the special nature of the constructed systems, but rather holds for a very wide class of formal systems, among which are included, in particular, all those which arise from the given systems by addition of finitely many axioms, assuming that no false sentences ... become provable by means of the additional axioms.*
>
> [K. GöDEL, in The Undecidable. Davis (ed.), New York, Raven Press, 1967, 5-6].

Ce résultat, comme du reste d'autres limitations mises en évidence depuis, est riche d'enseignements:

- par lui, nous savons une des limitations des systèmes formels "riches";
- par lui, nous réalisons que les démarches démonstratives nécessaires à établir les propriétés d'un système formel dépassent en richesse ce qui est autorisé dans le système formel;
- enfin, on peut le penser, l'état de la question relative au calculable (le décidable se ramènera au calculable) montre aujourd'hui des limites qu'un jour peut-être l'esprit saura dépasser.

> *...le "théorème d'incomplétude de Gödel", semble nous dire, non seulement que la mathématique n'est pas encore logique pure, mais aussi qu'il lui faut renoncer à jamais à l'espoir d'être entièrement maîtresse du sujet qu'elle se donne sitôt que l'esprit se le donne infini, cet infini aurait-il la simplicité la plus grande, celle justement de la suite des entiers.*
> *Or, rien n'oblige de penser qu'à cet égard la genèse intellectuelle humaine soit tout à fait achevée et indépassable. Après tout, qui sait si nous ne pouvons pas nous apprendre à penser mieux la multiplicativité du nombre, cet aspect de son être sur lequel notre épistémologie génétique ne semble pas avoir tout dit? Qui sait si cet effort de meilleure pensée n'aura pas finalement des répercussions jusque sur le cadre logique trop simple dans lequel, inconsidérément, notre spontanéité croit devoir couler l'énergie vive de l'intelligence mathématicienne?*
> *Seulement, sur un point de cette sorte, l'épistémologie génétique a à se faire non seulement étude génétique de la pensée mathématique à travers les stades avant tout prémathématiques de la pensée humaine. Il lui faut désormais se poursuivre en étude génétique de la pensée mathématique à travers des stades eux-mêmes déjà mathématiques de la pensée. Qui sait? ce travail se faisant, il lui faudra peut-être oser poursuivre plus avant le vecteur génétique de l'intellect et, de récit qui élucide, se transmuter, au bon moment, en décision consubstantielle à la clarté, créer.*
> [D. DUBARLE: in Logique et connaissance scientifique, La Pléiade, 1967, pp. 354-355].

10.1 Décidabilité de L^1

Soit L^1, le calcul des prédicats dans lequel on supprime:

1] tous les symboles de prédicat de degré >1

2] tous les symboles de foncteurs.

Il représente le calcul des propriétés (les prédicats monadiques), par opposition à la logique des relations.

Le système L est non contradictoire (Mth. 21), consistant (Mth.22) et sémantiquement complet (Mth. 30); le système L^1 possède donc également ces propriétés puisqu'il n'est qu'une partie de L.

Nous allons montrer que de plus L^1 est décidable et, pour cela, établir deux lemmes.

LEMME I - Si A est une ebf fermée de L^1 et si I est une interprétation sur un domaine Ω de k éléments, on peut construire une interprétation I' sur un domaine Ω' de (k+1) éléments telle que

$$val_{I'}(A) = \top \quad \text{ssi } val_I(A) = \top$$

ou

$$val_I(A) = \bot \quad \text{ssi } val_{I'}(A) = \bot$$

Démonstration: Considérons une ebf A fermée contenant m symboles de prédicats différents de degré 1. Soit p_i^1 l'un quelconque d'entre eux. D'autre part, considérons une interprétation I sur le domaine d'objets Ω de k éléments: $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

Nous voulons construire une interprétation I' sur le domaine d'objets Ω' de k+1 éléments:

$\Omega' = \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$

Etablissons tout d'abord la correspondance suivante:

$$\begin{tikzcd}
\underline{\Omega} & & \underline{\Omega'} \\
a_1 \arrow[rr] & & a_1 \\
a_2 \arrow[rr] & & a_2 \\
\vdots & & \vdots \\
a_c \arrow[rr] \arrow[rrd] & & a_c \\
\vdots & & a_{k+1} \\
\vdots & & \vdots \\
a_k \arrow[rr] & & a_k
\end{tikzcd}$$

Q u e s t i o n s :

92. La correspondance ci-dessus est-elle une application?
93. Soit l'ensemble Ω contenant les dix premiers nombres entiers, et $\Omega' = \Omega \cup \{12\}$. Ecrire la correspondance ci-dessus en posant $a_c = 8$.
94. Soit le prédicat p_1^1 défini en compréhension ainsi: "être un nombre premier". Déterminer le sous-ensemble γ de l'ensemble Ω ci-dessus qui satisfait en extension la propriété. Il s'agit du résultat de l'application $\Psi(p_1^1)$ sur Ω: $\Psi(p_1^1) = \gamma$. Ecrire également le résultat de l'application $\Psi'(p_1^1)$ sur Ω' : $\Psi'(p_1^1) = \gamma'$, qui satisfait la propriété.
95. Mêmes questions pour le prédicat p_2^1 défini en compréhension ainsi: "être un nombre pair".
96. Si l'on compare les sous-ensembles γ et γ' de la question 94, et ceux de la question 95, qu'observe-t-on?

Construction de l'interprétation I'

Cette construction s'établit notamment sur l'appartenance ou la non-appartenance de l'élément a_c (l'élément de Ω qui est en correspondance avec l'élément a_{k+1} de Ω') à l'image de p_i^1 par l'application Ψ.

1] $\Psi'(c_i) = \Psi(c_i)$

2] $\Psi'(p_i^0) = \Psi(p_i^0)$

3] Posons $\Psi(p_i^1) = \gamma$

Si $a_c \notin \gamma$ alors : $\Psi'(p_i^1) = \Psi(p_i^1) = \gamma$

Si $a_c \in \gamma$ alors : $\Psi'(p_i^1) = \gamma \cup \{a_{k+1}\}$

La démonstration de "$val_{I'}(A) = \top$ ssi $val_I(A) = \top$" se fait par induction sur le nombre <u>n</u> des connecteurs de A.

<u>Base</u> : n = 0

Deux cas sont possibles :

a. A est p_i^0 ou

b. A est $p_i^1 c_j$

a. Démonstration immédiate: clause 2] de la construction de I'

b. (←--) Supposons que $val_I(p_i^1 c_j) = \top$

Cela signifie que $\Psi(c_j) \in \Psi(p_i^1)$

ou autrement dit que $\Psi(c_j) \in \gamma$.

Mais $\gamma \subsetneq \gamma'$, et que γ soit ou non un sous-ensemble propre de γ', $\Psi'(c_j) \in \gamma'$, clause 1]; dit autrement, $\Psi'(c_j) \in \Psi'(p_i^1)$, donc $val_{I'}(p_i^1 c_j) = \top$

(--→) Supposons maintenant que $val_{I'}(p_i^1 c_j) = \top$, et montrons que $val_I(p_i^1 c_j) = \top$. Procédons par contraposition.

Soit donc $val_I(p_i^1 c_j) = \perp$. Cela entraîne que $\Psi(c_j) \notin \gamma$ et donc que $\Psi'(c_j) \notin \gamma'$.

DONC $val_{I'}(p_i^1 c_j) = \perp$.

Q u e s t i o n s :

97. Est-il nécessaire de passer par la contraposée?

98. De cette démonstration émane un parfum de sophisme. Bien que γ' contienne

avec certitude γ, ne se pourrait-il pas qu'il contienne également a_{k+1}? En ce cas si $\Psi'(c_j) = a_c$, $\Psi'(c_j)$ pourrait être dans γ' et notre raisonnement n'en serait pas un. Cette remarque n'est pas fondée. Pourquoi?

Hypothèse d'induction :

Si A est une ebf fermée de L^1 contenant au plus n connecteurs, et si I est une interprétation sur un domaine Ω de k éléments, on peut construire une interprétation I' sur un domaine Ω' de (k+1) éléments telle que

$$val_{I'}(A) = \top \qquad \text{ssi} \qquad val_I(A) = \top$$

Pas d'induction :

Démontrons le lemme pour une ebf fermée A possédant n+1 connecteurs. Trois cas sont à considérer.

a] A est $\sim B$

1. ($\leftarrow$--) $val_I(A) = \top$ donc $val_I(B) = \bot$ [et B est fermée.]
Par hypothèse d'induction:
$val_{I'}(B) = \bot$ et donc
$val_{I'}(\sim B) = val_{I'}(A) = \top$

2. (--$\rightarrow$) même procédure.

b] A est $B \supset C$

1. ($\leftarrow$--) $val_I(A) = \top$. Il s'ensuit que:
soit $val'_I(B) = \bot$ soit $val_I(C) = \top$
[Les ebf B et C sont fermées.]
Par hypothèse d'induction:
$val_{I'}(B) = \bot$ et $val_{I'}(A) = \top$
$val_{I'}(C) = \top$ et $val_{I'}(A) = \top$

2. (--$\rightarrow$) même procédure

c] A est $(\forall v)B$

1. ($\leftarrow$---) $val_I(A) = \top$ donc $val_I((\forall v)B) = \top$
Il s'ensuit que quelle que soit l'image de v dans Ω, $val_I(B) = \top$

Si B est fermée, alors il s'ensuit par hypothèse d'induction, que $val_{I'}(B) = \top$, quelle que soit l'image de v dans Ω'.

DONC $val_{I'}(A) = \top$

Si B possède la variable v libre, procédons comme suit:
Par hypothèse, quelle que soit l'image de v, l'ebf a pour valeur $\top$.
Associons donc à v un quelconque des objets. Exhibons la constante c_m qui par l'application Ψ est associée justement à cet objet.
Formons l'expression $B(c_m)$ à partir de $B(v)$ dans laquelle nous substituons c_m à v.

$val_I(B(v)) = \top$ donc $val_I(B(c_m)) = \top$

L'expression $B(c_m)$ possède un connecteur de moins que A et est fermée; par hypothèse d'induction on obtient que $val_{I'}(B(c_m)) = \top$.
Opérons à partir de $B(c_m)$ la substitution inverse, c_m/v. Nous avons alors $val_{I'}(B(v)) = \top$ et ceci quelle que soit la valeur de la variable v
DONC $val_{I'}(A) = \top$

2. $(\dashrightarrow)$ même procédure.

Q u e s t i o n :

99 . Dans le lemme I aurions-nous pu nous dispenser de la condition: "si A est une ebf fermée" ?

LEMME II - Si A est une ebf fermée de L^1 et si A contient m symboles de prédicats différents de degré 1, et si de plus on a une interprétation I sur un domaine fini quelconque on peut construire une interprétation I' sur un domaine qui a au plus 2^m éléments et telle que

$val_{I'}(A) = \top$ ssi $val_I(A) = \top$

ou $val_I(A) = \bot$ ssi $val_{I'}(A) = \bot$

Q u e s t i o n s :

100. Soit $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Attribuons en compréhension une propriété à chaque prédicat de degré 1 suivant:

p_1^1 = "être un nombre premier"

p_2^1 = "être un nombre pair"

p_3^1 = "être multiple de 3"

Ecrire les sous-ensembles γ_1, γ_2 et γ_3 de Ω qui correspondent extensionnellement aux propriétés ci-dessus.

101. Faire une partition de l'ensemble Ω ci-dessus en classes d'équivalence; c'est-à-dire construire les classes des éléments de Ω qui appartiennent
- à la fois à γ_1, γ_2 et γ_3
- à la fois à γ_1, γ_2 mais pas à γ_3
- à γ_1 mais pas à γ_2 ni à γ_3

:

- ni à γ_1, ni à γ_2 et ni γ_3.

Combien y a-t-il de possibilités?

102. Effectuer la même démarche en attribuant aux prédicats p_2^1 et p_3^1 les mêmes propriétés que ci-dessus et au prédicat p_1^1 la propriété : "être plus petit que 8".

Construction de l'interprétation I'.

Cette construction se fait comme suit:

Le domaine d'objets Ω' associé à l'interprétation I' est l'ensemble des classes d'équivalence construites à partir de Ω et déterminées par les m prédicats différents de A. Il y a au plus 2^m classes d'équivalence différentes.

Soit $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$;

Construction des applications Ψ' :

1. Si $\Psi(c_i) = a_j$, alors $\Psi'(c_i)$ est la classe d'équivalence de Ω' qui contient a_j.
2. $\Psi'(p_i^0) = \Psi(p_i^0)$
3. Si $\Psi(p_i^1) = \gamma$, alors $\Psi'(p_i^1)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de Ω' qui contient les éléments de γ.

Q u e s t i o n :

103. Relativement à la question 100, si $\Psi(p_1^1) = \{2, 3, 5, 7,\}$, quelle est $\Psi'(p_1^1)$?

La démonstration du lemme II se déroule de la même manière que celle du lemme I hormis la base de l'induction. Nous ne traiterons donc que de ce cas.

Base : $n = 0$

1] A est p_i^0 trivial, cf. construction.

2] A est $p_i^1 c_j$

1. ($\longleftarrow$) $val_I(p_i^1 c_j) = \top$

il s'ensuit par définition que $\Psi(c_j) \in \Psi(p_i^1)$.
Ainsi, si $\Psi(c_j) = \underline{a}$ et $\Psi(p_i^1) = \{a_g, \ldots \underline{a}, \ldots, a_k\}$
alors $\Psi'(c_j)$ est la classe d'équivalence qui contient $\underline{a}$ et $\Psi'(p_i^1)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de Ω' qui contient les éléments de $\Psi(p_i^1)$. De plus, l'unique prédicat p_i^1 détermine sur Ω <u>au plus</u> 2^n classes d'équivalence.

$$\Psi(c_j) = \underline{a} \qquad\qquad \Psi(p_i^1) = \{a_g, \ldots, \underline{a}, \ldots, a_k\}$$

$$\downarrow$$

$$\Psi'(c_j) = \{\ldots, \underline{a}, \ldots\}; \Psi'(p_i^1) = \{\{\ldots, a_g, \ldots\}, \ldots, \{\ldots, \underline{a}, \ldots\}, \ldots, \{\ldots, a_k, \ldots\}\}$$

DONC $\Psi'(c_j) \in \Psi'(p_i^1)$ et $val_{I'}(p_i^1 c_j) = \top$

2. ($\longrightarrow$) $val_{I'}(p_i^1 c_j) = \top$. Il faut montrer que $val_I(p_i^1 c_j) = \top$

Procédons par contraposition et posons :
$val_I(p_i^1 c_j) = \perp$, il s'ensuit que $\Psi(c_j) \notin \Psi(p_i^1)$.
Ainsi, si $\Psi(c_j) = \underline{a}$, alors $\Psi(p_i^1)$ ne contient pas $\underline{a}$. Dès lors, $\Psi'(c_j)$ qui est la classe d'équivalence qui contient $\underline{a}$ ne se trouve pas parmi les classes d'équivalence qui composent $\Psi'(p_i^1)$.
DONC $\Psi'(c_j) \notin \Psi'(p_i^1)$ et $val_{I'}(p_i^1 c_j) = \perp$

DEFINITION 35 - Une ebf A de L est <u>n-valide</u> ssi elle est logiquement valide
-n-valide- sur un domaine fini Ω de $\underline{n}$ éléments, $n \notin \mathbb{N}$

METATHEOREME 31 - Dans L^1, toute ebf A fermée qui contient $\underline{m}$ symboles différents de prédicat de degré un est logiquement valide ssi elle est 2^m-valide
ou A n'est pas 2^m-valide ssi A n'est pas logiquement valide.

Démonstration: ($\longrightarrow$) Si A est logiquement valide, elle est valide sur tout domaine et on sait construire un domaine possédant 2^m éléments.

($\leftarrow$--) Procédons par contraposition et montrons que si A n'est pas logiquement valide alors elle n'est pas 2^m-valide.
Si $\not\models_{L^1} A$ alors il existe une interprétation I telle que $val_I(A) = \perp$. Donc par le lemme II on peut trouver une interprétation I' sur un domaine à 2^m éléments <u>au plus</u> telle que $val_{I'}(A) = \perp$

En appliquant aussi souvent que nécessaire le lemme I, on arrivera à une interprétation qui a <u>exactement</u> 2^m éléments.

METATHEOREME 32 - L^1 est décidable.

<u>Démonstration</u>: Il n'est besoin que de s'occuper des ebf fermées de L^1 [Mth. 14, ∀e, GEN].
Soit A une ebf fermée quelconque contenant <u>m</u> prédicats de degré 1 différents. Pour décider si A est ou n'est pas un théorème on procède par un calcul de sa validité sur un domaine fini de 2^m éléments. Il s'agit donc de calculer si A est ou n'est pas 2^m-valide.
En effet:
Les métathéorèmes 19 et 30 garantissent que:

$\vdash A$ ssi $\models A$

ou $\not\models A$ ssi $\not\vdash A$

et le métathéorème 31 que:

$\models A$ ssi A est 2^m-valide

ou A n'est pas 2^m-valide ssi $\not\models A$.

Nous possédons ainsi une procédure effective de calcul.

10.2 Indécidabilité des systèmes arithmétiques

Il est nécessaire pour démontrer l'indécidabilité du calcul des prédicats de degré <u>n</u>, $n \geq 2$ de prouver un résultat plus "fort". Il s'agit en effet d'établir préalablement l'indécidabilité de l'arithmétique. C'est la raison pour laquelle nous abordons ce problème maintenant.

Précisons tout d'abord les conditions minimales qu'il faut réunir pour construire un système formel capable de représenter de manière acceptable l'arithmétique, système que nous appellerons un système arithmétique minimal: un SAM. Afin de formaliser l'arithmétique en un SAM, S^a, il semble raisonnable d'exiger que:

1. Le système S^a soit un système du premier ordre.
2. Il soit possible d'interpréter certains au moins de ses termes comme des nombres naturels.
3. Certains des théorèmes de S^a correspondent à des lois arithmétiques.
4. Le système S^a soit non contradictoire.
5. Chaque ensemble décidable de nombres naturels soit représentable dans S^a. De manière intuitive, il s'agit d'établir une correspondance bi-univoque entre les éléments d'un tel ensemble et les ebf du système formel dont la variable libre, quand elle représente un terme interprétable comme un nombre naturel, est un théorème de S^a. Nous préciserons bien sûr cette notion.

Formaliser l'arithmétique consistera donc à construire un système formel appliqué dont certains termes pourront être interprétés comme des nombres naturels. Il s'ensuit qu'il est indispensable de distinguer de manière typographique les nombres naturels des termes qui seront interprétés comme tels. De manière à reconnaître immédiatement qu'un terme de S^a est lié aux nombres naturels, nous utiliserons la convention suivante:

> Si n est un nombre naturel, nous noterons $\underline{n}$ le terme qui lui est associé par l'interprétation. Nous appellerons ce terme un numéral (un numéral, des numéraux). Le terme $\underline{n}$ est donc un objet formel du système.

Q u e s t i o n s :

104. Si t est un terme de S^a, quelle est $\Psi_T(t)$?
105. Ecrire le numéral qui a comme image 0? celui qui a comme image 4? celui qui a comme image 3+5? celui qui a comme image n.m?
106. Si le système S^a ne possédait pas les symboles $\underline{+}$ et $\underline{.}$ (qui correspondent respectivement à + et à .), avec quel type de symboles aurions-nous pu les écrire?

DEFINITION 36 - -fonction caractéristique- Soit A(v) une ebf de S^a qui contient la variable libre v. On appelle fonction caractéristique associée à A(v), la fonction f(n) définie ainsi :

$$\begin{cases} f(n) = 0 & \text{si} \quad \vdash_{S^a} A(\underline{n}) \\ f(n) = 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque

Si S^a est décidàble, la fonction caractéristique d'une ebf de la forme A(v) est calculable, ce qui signifie que quel que soit le nombre n, on saura si $f(n) = 0$ ou si $f(n) = 1$.

DEFINITION 37 - -représentable- Soit E un ensemble de nombres naturels. On dit que E est représentable dans S^a, s'il existe une ebf de S^a, de la forme A(v) et telle que, quel que soit le nombre n, $n \in E$:
$n \in E$ ssi $\vdash_{S^a} A(\underline{n})$

Question:

107. Soit un système S^a et le domaine d'objets $\Omega = \mathbb{N}$
Soit le prédicat de degré 2 p_1^2 qui dans l'interprétation est associé en compréhension à la relation "être égal à". Acceptons que dans ce S^a l'expression suivante est un théorème : $\vdash_{S^a} p_1^2 v\ v$.
Peut-on affirmer que l'ensemble E des nombres premiers est représentable dans S^a parce que quel que soit le nombre $n \in E$, $\vdash_{S^a} p_1^2 \underline{n}\ \underline{n}$?
Si cela n'est pas le cas comment pourrait-on imaginer construire une ebf de telle manière qu'elle remplisse ce rôle de 'représentativité'?

METATHEOREME 33 - Tout SAM est indécidable

Démonstration: I. Enumération des fonctions caractéristiques.
Grâce à la numérotation de Gödel (lemme II, p. 35) il est possible d'énumérer les ebf de S^a qui contiennent une variable libre:
$A_0(-), A_1(-), \ldots, A_n(-), \ldots$
Pour chacune d'entre elles, on peut lui associer sa fonction caractéristique. En établissant une correspondance entre l'ensemble ordonné des ebf qui contiennent une variable libre et leur fonction caractéristique associée, on obtient bien un ensemble ordonné de fonctions caractéristiques:
$f_0(-), f_1(-), \ldots, f_n(-), \ldots$ (*)

II. Construction d'une fonction.
Construisons la fonction h(n) suivante :
$$\begin{cases} h(n) = 1 & \text{si } f_n(n) = 0 \\ h(n) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q u e s t i o n :

108. Quelle est la valeur de la fonction h pour n = 0, 1, 2, 3, si $f_0(0) = 0$; $f_1(1) = 1$; $f_2(2) = 0$; $f_3(3) = 0$?

Sachant que $f_8(5) = 1$ quelle est la valeur de h(8)?
$h(7) = 0$, quelle est la valeur de $f_7(7)$?

La fonction h est-elle calculable?

III. Lemme. La fonction h(-) n'est pas dans l'énumération (*) des fonctions caractéristiques.
Raisonnons par l'absurde et supposons que la fonction h(-) appartient à l'énumération (*). Cette fonction h(-) est donc un des $f_i(-)$. Supposons qu'elle est $f_k(-)$. Il s'ensuit alors que:
$h(k) = 1$, donc $f_k(k) = 1$, si $f_k(k) = 0$
ET $h(k) = 0$, donc $f_k(k) = 0$, si $f_k(k) = 1$
Nous obtiendrons ainsi un résultat quelque peu surprenant : $f_k(k) = 1$ ssi $f_k(k) = 0$.

Q u e s t i o n:

109. De quelle ebf, la fonction h(-) est-elle fonction caractéristique sous l'hypothèse absurde? Et que pourrait-on dire de cette ebf?

IV. Construction d'un ensemble de nombres.
En utilisant la fonction h(-) construisons l'ensemble de nombres naturels E suivant:
$n \in E$ ssi $h(n) = 0$

V. Montrons enfin que S^a n'est pas décidable.
Hypothèse absurde: S^a est décidable.
Il s'ensuit que l'ensemble E construit en IV, est un ensemble décidable. En effet, quel que soit le numéral $\underline{n}$, on peut savoir si $\vdash_{S^a} A_i(\underline{n})$, donc $f_i(n)$ est calculable pour tout i et pour tout n. Ceci entraîne que la fonction h(-) est calculable, et par conséquent, que l'ensemble E est décidable.

Q u e s t i o n:

110. Que faut-il faire pour savoir si $18 \in E$?

MAIS l'ensemble E n'est pas représentable dans S^a. En effet, s'il l'était, il existerait une ebf A(v) (déf. 37, p. 145) telle que:

$n \in E$ ssi $\vdash_{S^a} A(\underline{n})$

MAIS, $n \in E$ ssi $h(n) = 0$, c'est-à-dire, ssi $\vdash_{S^a} A(\underline{n})$

Il s'ensuit d'une telle situation que la fonction h(-) serait une fonction caractéristique de A(v) et qu'elle serait dans l'énumération (*), ce qui, comme nous venons de le montrer, n'est pas le cas.

Nous pouvons donc conclure:

Si S^a est décidable, S^a n'est pas un système arithmétique minimal; la condition (5) n'est pas remplie

OU par contraposition:

Si S^a est un système arithmétique minimal, alors S^a n'est pas décidable.

Remarque

Ce qui précède ne fait que fournir la démarche de pensée du théorème de Gödel. Il reste à prouver qu'il existe des systèmes arithmétiques minimaux. Pour cela, il faudra construire un tel SAM; nous nous y emploierons. Puis il faudra montrer que le système construit satisfait aux conditions d'un SAM [chap.5]

La démonstration de la non-contradiction est loin d'être triviale; elle exige une présentation particulière des systèmes formels. Gentzen offre cette démonstration en 1935/36. Il utilise pour cela un système de règles qui appartiennent à la déduction naturelle ainsi que le principe d'induction transfinie, principe qui n'appartient ni à la logique des prédicats du premier ordre ni à la théorie élémentaire des nombres.

Quant à la représentativité, elle exige de définir de façon opératoire l'idée naïve qu'une fonction est calculable. Pour ce faire, nous présenterons la notion de fonction récursive.

Question:

111. Pourrions-nous déduire sans autre l'indécidabilité de L^n de celle de S^a ?

10. 3 Indécidabilité de la logique des prédicats de degré n, L^n [n>1]

Esquisse d'une démonstration

En 1950, R.M. Robinson a construit un système arithmétique minimal S^r, dit "arithmétique de Robinson". Il a montré que S^r était indécidable, comme d'ailleurs chacune de ses extensions. Ce système jouit de propriétés que ne possède pas le système S^a que nous construirons.

Le système S^r possède un nombre fini d'axiomes: $A_1, A_2, \ldots, A_n$. D'autre part, en remplaçant partout les symboles de foncteurs par des symboles de prédicats convenablement construits, les axiomes de S^r deviennent des ebf fermées de L^n, à savoir:

$$A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*$$

Soit B, un théorème de S^r: $\vdash_{S^r} B$. B est donc issu entre autres choses des axiomes A_i de S^r. En opérant la transformation des foncteurs en prédicats sur l'expression B, on obtiendra l'ebf B* de L^n. Et l'on pourra déduire, dans L^n, B* des hypothèses $A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*$.

Posons $A^* = A_1^* \wedge A_2^* \wedge \ldots \wedge A_n^*$

On peut démontrer alors que

$$A^* \vdash_{L^n} B^* \quad \text{ssi} \quad \vdash_{S^r} B$$

A* est une ebf fermée de L^n. On peut donc appliquer le "théorème de la déduction". Il s'ensuit donc que

$$\vdash_{L^n} A^* \supset B^* \quad \text{ssi} \quad \vdash_{S^r} B$$

MAIS S^r est indécidable, il existe donc au moins une ebf fermée C dont on ne pourra pas décider si elle est ou non un théorème, et donc, on ne pourra pas décider si l'expression $A^* \supset C^*$ est un théorème ou non de L^n. L^n est donc indécidable.

CHAPITRE 5 - UN SYSTEME ARITHMETIQUE MINIMAL: S^a

1. PREAMBULE

A la fin du chapitre précédent, nous avons présenté sommairement les propriétés essentielles qu'il faut réunir pour construire un système formel capable de représenter l'arithmétique. Nous exposons maintenant les éléments qui entrent dans la composition d'un tel système. Mais avant de présenter cette construction, proposons deux commentaires.

L'histoire récente de la théorie des systèmes formels s'inscrit profondément dans l'héritage hilbertien qui cherche à éliminer toute intuition des fondements mathématiques. L'arithmétique élémentaire -la théorie des nombres entiers naturels- n'est qu'une partie de l'ensemble des théories mathématiques. Son étude se justifie cependant dans la mesure où elle sert de fondement à la construction de systèmes plus complexes. En effet, grâce à elle, il est possible d'accéder aux théories des nombres rationnels, réels et complexes, ainsi que d'aborder l'analyse. Cette nature première de l'arithmétique élémentaire justifie l'étude de sa construction formelle. Nous nous emploierons donc à développer un système du premier ordre appliqué qui permettra de représenter cette théorie, c'est-à-dire, à même de rendre compte des opérations et des relations qui règlent la structure dont le domaine des objets est l'ensemble des entiers naturels. Ensuite, il s'agira de vérifier que la structure abstraite développée est alors adéquate pour interpréter l'arithmétique. Dans cette perspective, nous aurons également à nous préoccuper de l'existence d'autres modèles possibles que celui simplement arithmétique.

A la fin du XIXe siècle, la mathématique classique avait déjà été réduite à la théorie des nombres entiers naturels. Il restait cependant à l'axiomatiser. Cette expression est à comprendre dans l'esprit de ce temps: une représentation symbolique intuitive et une organisation des idées primitives et des principes fondateurs de l'arithmétique élémentaire. Hermann Grassmann [1809-1877], théologien et linguiste, exposait en 1861 une caractérisation de l'ensemble des nombres entiers et Julius Wilhelm Richard Dedekind [1831-1916] proposait dans son livre *Was sind und was sollen die Zahlen?* [1888] quatre conditions -axiomes- capables de caractériser adéquatement la structure des entiers naturels. Mais c'est à

Guiseppe Peano [1858-1932] que l'histoire a rendu hommage. En 1889, il publie les *Arithmetices Principia a nova methodo exposita* dans lesquels il montre qu'en plus des notions de pure logique, trois idées primitives -zéro, nombre, successeur- et cinq axiomes permettent de rendre compte de la structure des nombres entiers. Voici ces axiomes:

- 0 est un nombre
- le successeur d'un nombre quelconque est un nombre
- 0 n'est le successeur d'aucun nombre
- deux nombres différents ne peuvent pas avoir le même successeur
- toute propriété qui appartient à 0, ainsi qu'au successeur de chaque nombre qui possède la propriété, appartient à tous les nombres.

Ces éléments sont repris dans le *Formulaire Mathématique* [1895-1905, quatre volumes en français et le cinquième en italien] qui rendra célèbre Peano, et c'est ceux-ci que nous aménagerons afin de construire un système arithmétique minimal.

2. LA CONSTRUCTION DU SYSTEME S^a

Il s'agit d'un système formel du premier ordre qui contient:

- un seul symbole de constante d'objet: c_1 =df $\underline{0}$
- un ensemble de symboles de variables d'objet: $\{v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots\}$
- un unique symbole de prédicat de degré deux: p_1^2 =df $\boxed{=}$
- trois symboles de foncteurs:
  un de degré un: f_1^1 =df $*$
  deux de degré deux: f_1^2 =df $\boxplus$; f_2^2 =df $\boxdot$
- et bien entendu, les symboles de connecteurs logiques ainsi que les parenthèses.

Q u e s t i o n s :

112. Ecrire quelques termes de S^a.
113. Les termes de S^a contiennent-ils des variables libres? des variables liées? des constantes?
114. Expliciter la définition inductive qui donne accès à l'ensemble de tous les termes de S^a.
115. Ecrire quelques formules atomiques et ebf de S^a.
116. S^a contient-il des symboles de prédicat de degré zéro?

DEFINITION 38 - Un terme de S^a qui ne contient pas de variable est appelé
-numéral- un numéral.

R e m a r q u e. A cette étape de la construction, il n'est bien sûr pas encore question d'interprétation. Il semble cependant souhaitable d'anticiper la perspective interprétative. C'est la raison pour laquelle nous avons associé à différents objets formels du système la forme qu'ils possèdent dans la réalisation sémantique normale où ils prennent signification: l'arithmétique élémentaire. Afin d'éliminer toute ambiguïté entre syntaxe et sémantique, nous avons choisi de souligner les numéraux et d'entourer d'un carré les objets formels que sont les deux foncteurs de degré deux et le relateur.

- $\underline{0}$: il s'agit du zéro formel
- $\boxed{=}$: ce symbole représentera l'égalité
- $*$: ce symbole représentera la fonction successeur immédiat
- $\boxplus$: ce symbole représentera l'addition
- $\boxdot$: ce symbole représentera la multiplication

D'autre part, les définitions inductives que nous proposons pour inscrire les termes et les ebf rendent ceux-ci peu conformes à notre habitude d'écrire les expressions arithmétiques. En effet, ces derniers ne sont généralement pas des expressions préfixées. C'est la raison pour laquelle nous modifierons l'écriture partiellement préfixée pour admettre une écriture plus conventionnelle.

Dorénavant, si t, t_i et t_j sont des termes, nous écrirons

$t*$	au lieu de	$*t$
$(t_i \boxplus t_j)$	"	$\boxplus\, t_i t_j$
$(t_i \boxdot t_j)$	"	$\boxdot\, t_i t_j$
$(t_i \boxed{=} t_j)$	"	$\boxed{=}\, t_i t_j$

et nous supprimerons dans les expressions complexes les parenthèses extérieures inutiles.

En acceptant ces diverses conventions, les axiomes propres de S^a se présentent ainsi.

<u>Les axiomes propres de S^a</u>

a_1 : $(v_i \boxed{=} v_j) \supset ((v_i \boxed{=} v_k) \supset (v_j \boxed{=} v_k))$

a_2 : $(v_i \boxed{=} v_j) \supset (v_i* \boxed{=} v_j*)$

a_3 : $(v_i* \boxed{=} v_j*) \supset (v_i \boxed{=} v_j)$