avec l'ebf A, respectivement B, associée par définissabilité à la fonction f, respectivement h [Mendelson 1979: 149].

METATHEOREME 37.6 - L'opération de MINIMALISATION GENERALISEE conserve la propriété de définissabilité.

Soit f une fonction récursive telle que, quel que soit le k-uple $<n_1,\ldots, n_k>$, il existe un n tel que $f(n_1,\ldots, n_k, n) = 0$.
f est définissable dans S^a. Il existe donc une ebf A, à n+2 arguments qui lui est associée.

$$A(v_1,\ldots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2})$$

Soit $g(n_1,\ldots, n_k)$, la fonction récursive définie par l'opération de minimalisation sur f

$$g(n_1,\ldots, n_k) = \mu n(f(n_1,\ldots, n_k, n) = 0).$$

Cette fonction g est définissable dans S^a par l'ebf C à k+1 arguments:

$$C(v_1,\ldots, v_k, v_{k+1}) =df\ A(v_1,\ldots, v_k, v_{k+1}, \underline{0})\wedge (\forall v)((v < v_{k+1}) \supset \sim A(v_1,\ldots, v_k, v, \underline{0}))$$

[Mendelson 1979: 150].

Terminons cette partie qui concerne la définissabilité par une dernière question.

Q u e s t i o n :

151. Esquisser les grandes lignes d'une démonstration qui vérifierait que toute relation récursive est définissable dans S^a.

EPILOGUE

La théorie des systèmes formels est l'aboutissement d'une longue réflexion sur la nature du raisonnement hypothético-déductif et sur le problème des fondements des théories mathématiques et logiques. A cet égard, l'apport des logiciens et mathématiciens des XIXème et XXème siècles est déterminant. A travers notamment les travaux de Boole, Cantor, Frege, Russell, Hilbert, les théorèmes de limitation de Gödel, on observe une formalisation progressive de la pensée déductive. Cette mise en forme s'achève par la réalisation d'un édifice théorique particulièrement complexe et structuré, où langue et métalangue sont soigneusement séparées et où la syntaxe et la sémantique apparaissent comme deux domaines strictement différenciés bien que pensés l'un par rapport à l'autre.

Les deux premiers fascicules des *Travaux de Logique* du Centre de Recherches Sémiologiques ont pour objectif de présenter la théorie des systèmes formels, tout en mettant en évidence l'instrument d'analyse qu'elle offre, sa rigueur et sa précision. Mais cette contribution voudrait offrir davantage. A travers les propriétés métalogiques -notamment les théorèmes de Löwenheim et de Skolem, les résultats de Gödel, la thèse de Church- elle vise à susciter une réflexion sur les faits de limitation et l'esprit de construction qui sont associés à la théorie des systèmes formels. Elle voudrait mettre en évidence que la formalisation ne saurait se dispenser de la pensée naturelle. Ces deux fascicules aimeraient également exposer une connaissance qu'il est utile de dominer pour aborder d'autres manières de concevoir les langues formelles. Ils voudraient aussi être un argument pour justifier la nécessité et la légitimité d'une réflexion qui se prolonge dans le champ de la logique naturelle. D'autres monographies s'emploieront à développer davantage ces différents aspects.

Nous conclurons en citant un passage de l'ouvrage de D. Dubarle: *Initiation à la logique*. Bien qu'écrites en 1957, ces lignes restent aujourd'hui encore très actuelles. Leur intérêt excusera la relative longueur de la citation.

> Les formalismes logico-mathématiques que nous sommes capables de mettre sur pied sont du genre des herbiers. Ils nous font voir distinctement un état de la pensée mathématique. Ils ne nous montrent pas directement ces virtualités antérieures aux états mêmes, ces virtualités préscientifiques que la pensée mathématique vivante et en instance d'évolution emporte avec elle comme son plus précieux capital d'avenir. Leur fonction est précisément *de ne pas* les représenter, de les faire perdre au clair concept de la science afin de mieux faire sentir, comme par un choc en retour, l'originalité et le prix de ce qui est absent de ce clair concept. Que ce quelque chose existe comme une source indéfinie de renouvellement, ils l'at-

testent d'une façon indirecte. Les théorèmes critiques de Gödel, Church, Löwenheim-Skolem sont des théorèmes qui forcent à comprendre la non-autarchie de ces formalismes, l'impossibilité qu'ils ont de se clore de façon suffisante sur eux-mêmes. Les formalismes manifestent alors, pour ainsi dire, l'adhérence du résultat qu'ils sont à un indéfini qui n'est *pour eux* que néant et obscurité, mais d'où montera leur renouvellement essentiel. *Pour l'esprit du mathématicien* qui vit sa pensée, l'indéfini en question n'est en effet nullement néant et obscurité, mais faculté indéfinie et encore inexplorée des clartés ultérieures. Le bienfait des formalismes à cet égard est d'apprendre où il faut désormais regarder pour entrer dans le radicalement nouveau, dans le véritable imprévu qui seul fait les grandes conquêtes.

La logique de la pensée mathématique paraît ainsi s'être conquise à la fois en vertu d'une espérance naïve de la rationalité mathématique et comme en vue de démontrer à l'esprit le succès bien relatif de cette espérance c'est-à-dire au fond sa catastrophe. Mais les résultats de cette conquête ne sont pourtant pas aussi négatifs qu'il peut le paraître au terme de cette démonstration toute neuve (il y a tout juste vingt cinq ans que Gödel a démontré ses théorèmes). Un certain départ se fait. Ce qui passe des mathématiques et de leur logique dans les formalismes c'en est précisément le passé, si riche soit-il encore d'avenues à parcourir et incomplètement parcourues. Mais la nette conscience de ce passé, une fois bien vu qu'il ne saurait être tout, permet d'aborder le tout avec des yeux renouvelés, formés à l'exploration de l'avenir, aussi bien ouverts à la création mathématique la plus essentielle que préparés à la logique, inédite encore, de ces créations qui viendront. [pp. 81-82]

BIBLIOGRAPHIE

BOOLOS G.S. & JEFFREY R. [1985]: *Computability and Logic.* Cambridge, Cambridge University Press.

BOUVIER A. & GEORGE M. [1979]: *Dictionnaire des mathématiques.* Paris, PUF.

CHURCH A. [1932]: "A set of postulates for the foundation of logic", *Annals of Mathematics, 33,* no 2, part I, pp. 346-366.

----- [1933]: "A set of postulates for the foundation of logic", *Annals of Mathematics, 34,* part II, pp. 839-864.

CORCORAN J. [1973]: "Gaps between logical theory and mathematical practice", in M. Bunge (ed.): *The methodological unity of science.* Dordrecht, Reidel Pub., pp. 23-49.

DALEN D. van [1983]: "Algorithms and decision problems: a crash course in recursion theory", in D. Gabbay & F. Guenthner (eds): *Elements of classical logic.* Dordrecht, Reidel Pub., pp. 409-478.

DAVIS M. [1965]: *The undecidable.* New York, Raven Press.

DEDEKIND D.W.R. [1932]: "Was sind und was sollen die Zahlen?", *Ges. Math. Werke, t. III.* Vieweg, Braunschweig, pp. 335-391 (parution 1888).

DETLOVS V.K. [1958]: "Equivalence of normal algorithms and recursive functions", *Tr. Mat. Inst. Steklov, LII*, pp. 75-139.

DIEUDONNE J. [1978]: *Abrégé d'histoire des mathématiques, II.* Paris, Hermann.

DUBARLE D. [1957]: *Initiation à la logique.* Paris, Gauthier-Villars, Collec. de Logique mathématique, XIII.

----- [1967]: "Critique du réductionnisme" in *Logique et connaissance scientifique.* Paris, Gallimard, La Pléiade, pp. 334-356.

DUMITRIU A. [1977]: *History of logic.* Tunbridge Wells (Kent), Abacus Press, 4t. en 1 vol. Transl. by D. Zamfriescu.

EUCLIDE [1956] : *The thirteen books of Euclid's elements.* New York, Dover. Traduction, introduction et commentraire de T. Heath.

GENTZEN G. [1935]: "Die Wiederspruchfreiheit der reinen Zahlentheorie", *Mathematischen Annalen, vol. 112,* pp. 493-565.

GODEL K. [1931]: "Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I", *Monatsch. für Math. und Physik, 38,* pp. 193-198.

----- [1965]: "On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related Systems", in M. Davis (ed.) [1965], pp. 5-38. (Première publication 1931).

----- [1967]: "The completeness of the axioms of the functional calculus of logic", in J. van Heijenoort (ed.) [1967], pp. 582-591. (Première publication 1930).

GRASSMANN H. [1984]: *Gesammelte Werke*. Leipzig, Teubner, 3. vol.

~~GRIZE J.-B. [1972]: *Logique moderne I*. Paris/ Mouton, Gauthier-Villars/~~ La Haye.

GRZEGORCZYK A. [1974]: *An outline of mathematical logic*. Dordrecht, Reidel Pub.

HEIJENOORT J. van [1967]: *From Frege to Gödel*. Cambridge, Harvard University Press.

HENKIN L. [1949]: "The completeness of the first-order fonctional calculus", *The Journal of Symbolic Logic, vol. 14,* no 3, pp. 159-166.

HERBRANDT J. [1930]: "Recherches sur la théorie de la démonstration", *Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, III,* 33, pp. 33-160.

HILBERT D. & BERNAYS P. [1934]: *Grundlagen der Mathematik*. Berlin, Springer, vol. 1.

------ [1939]: *Grundlagen der Mathematik*. Berlin, Springer, vol. 2.

HILBERT D. [1967]: "The foundation of mathematics", in J. van Heijenoort (ed.) [1967], pp. 464-479. (Première publication 1927).

HUNTER G. [1973]: *Metalogic. An introduction to the metatheory of standard first-order logic*. Berkeley, University of California Press.

KLEENE S.C. [1935]: "A theory of positive integers in formal logic", *American Journal of Mathematics, vol. 57,* part I, pp. 153-173, part II, pp. 219-244.

------ [1936]: "λ-definability and recursiveness", *Duke Math. Journal,* 2, 340-353.

------ [1971]: *Introduction to metamathematics*. Amsterdam, North-Holland.

KNEALE N. & KNEALE M. [1962]: *The development of logic*. Oxford, Clarendon Press.

LOWENHEIM L. [1967]: "On possibilities in the calculus of relatives", in J. van Heijenoort (ed.) [1967], pp. 228-251. (Première parution 1915].

MARKOV A. [1954]: "The theory of algorithms", *Tr. Mat. Inst. Steklov, XLII.*

MARTIN R. [1964]: *Logique contemporaine et formalisation*. Paris, PUF.

MENDELSON E. [1979]: *Introduction to mathematical logic*. New York, Van Nostrand.

MONK J.B. [1976]: *Mathematical logic*. New York, Springer.

PEANO G. [1967]: "The principles of arithmetic, presented by a new method" in J. van Heijenoort (ed.) [1967], pp. 23-97. (Première publication 1889).

PRESBURGER M. [1929]: "Ueber die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt", *Sprawozdanre z I Kongresu matematyków krojów slowianskich, Warszawa 1929.* (Warsaw, 1930), pp. 92-101, 395.

ROBINSON R.M. [1950]: "An essentially undecidable axiom system", *Proceedings of the International Congress of Mathemacians.* Cambridge, University Press.

ROSSER D.B. [1978]: *Logic for mathematicians.* New York, Chelsea.

SKOLEM T. [1933]: "Ueber die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines eindlichen Axiomensystems, *Norsk matematisk forenings skrifter,* série 2, no 10, pp. 73-82.

----- [1934]: "Ueber die Nicht-Charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen, *Fundamenta Mathematicae, 23,* pp. 150-161.

----- [1967]: "On mathematical logic", in J. van Heijenoort (ed.) [1967], pp. 508-524. (Première publication 1923).

----- [1971]: "Peano's axioms and models of Arithmetic", in T. Skolem *et al.: Mathematical interpretation of formal systems.* Amsterdam, North-Holland, 1-14.

TARSKI A. [1971]: *Introduction à la logique.* Paris, Gauthier-Villars.

----- [1972]: *Logique, sémantique, métamathématique.* Paris, A. Colin, vol. 1.

----- [1974]: *Logique, sémantique, métamathématique.* Paris, A. Colin, vol. 2.

TURING A. [1936-37]: "On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem", *Proceedings of London Math. Society, 42*: pp. 230-265, *43*: pp. 544-546.

----- [1937]: "Computability and λ-definability", *The Journal of Symbolic Logic, vol. 2,* no 4, pp. 153-165.

WHITEHEAD A.N. & RUSSELL B. [1910]: *Principia Mathematica.* Cambridge, University Press, vol 1.

INDEX DES AUTEURS

Introduction à la théorie des systèmes formels

Les italiques renvoient aux pages du deuxième fascicule.

INDEX DES MATIERES

Introduction à la théorie des systèmes formels

Les définitions numérotées se trouvent aux pages soulignées ici. Les italiques renvoient aux pages du deuxième fascicule.