d'envisager à nouveau une combinatoire des valeurs de vérité d'un axiome et de déterminer que sa table de vérité résultante possède une qualité de l'ordre de la tautologie: à savoir, ne contenant que la valeur $\top$.

Nous pouvons poursuivre notre raisonnement et établir que tout schéma de tautologie de $L^0$ auquel est substituée, à chacune de ses métavariables, une ebf de L, possède également cette qualité de l'ordre de la tautologie.

DEFINITION 28 - -instance de tautologie- On appelle instance de tautologie dans L, le résultat de la substitution d'ebf de L dans un schéma de tautologie de $L^0$.

METATHEOREME 15 - Les schémas d'axiome A1-A3 fournissent des instances de tautologie dans L.

METATHEOREME 16 - Les schémas d'axiome A1-A3 sont logiquement valides.

METATHEOREME 17 - Le schéma d'axiome A4 est logiquement valide:
$\models (\forall v)A(v) \supset A(v/t)$ si t est libre pour v dans A(v).

Démonstration: Donnons-nous une interprétation I quelconque. Deux cas peuvent se présenter:
1) $val((\forall v)A(v)) = \top$
2) $val((\forall v)A(v)) = \perp$
Etude du cas 1):
La clause 5 de la définition 24 stipule que
$val((\forall v)A(v)) = \top$ ssi $val(A(v)) = \top$ quelle que soit l'image que $\psi_V$ a attribuée à v. Donc en particulier si cette image est $\psi_T(t)$, ce qui signifie que $val(A(t)) = \top$.
Le schéma d'axiome A4 a la forme d'une conditionnelle dont le conséquent possède la valeur $\top$. Le raisonnement est tenu pour une interprétation quelconque [rien n'a été spécifié à son sujet], le schéma d'axiome A4 est donc, dans ce cas, logiquement valide.

Question:

54. Par quel raisonnement s'assure-t-on que le schéma A4 est logiquement valide dans le deuxième cas?

Remarque: Le raisonnement très simple ci-dessus dissimule la raison pour laquelle A4 stipule que t doit être libre pour v dans A(v). Voici ce qu'il cache.

Poser que val((∀v)A(v)) = $\top$ revient à dire que val(A(v)) = $\top$ pour une application $\Psi_V$ de la forme:

$$
\begin{array}{ccc}
\underline{EV} & \xrightarrow{\Psi_V} & \underline{\Omega} \\
v_1 & & a_1 \\
v_2 & & a_2 \\
\vdots & & \vdots \\
v & & x \\
\vdots & & \vdots \\
v_k & & a_k \\
\vdots & & \vdots \\
v_n & & a_n \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

où x peut prendre n'importe quelle valeur dans $\Omega$

Supposons que dans l'expression $(\forall v)A(v) \supset A(v/t)$, le terme t ne soit pas libre pour v dans A(v). C'est dire que le terme t contient une variable $v_k$ libre. Relativement à l'application $\Psi_V$, $v_k$ possède une image, $a_k$ par exemple. C'est également dire que $v_k$ est liée dans l'expression A. Il faudrait donc que $\Psi_V$ attribue à $v_k$ non pas l'image $a_k$ mais n'importe quelle valeur dans $\Omega$, ce qui n'est pas garanti.

Considérons l'exemple suivant:

$$A(v) =df \sim(\forall v_k)\sim(p_1^2 v v_k)$$

$p_1^2$ : "être différent" $\Omega = \mathbb{N}$

Le terme t est $v_k$ et $\Psi_V(v_k) = a_k$.

Interprétons l'expression (∀v)A(v): "Pour tout nombre naturel x, il existe un nombre y tel que x est différent de y". Ce qui est vrai et donc val((∀v)A(v)) = $\top$. Ceci revient à dire que val(A(v)) = $\top$ également pour l'image de la variable $v_k$ attribuée par $\Psi_V$: $\Psi_V(v_k) = a_k$.

Mais, $\sim(\forall v_k)\sim(p_1^2 v_k v_k)$ est fausse. En effet, il n'existe aucun nombre différent de lui-même.

METATHEOREME 18 - Le schéma d'axiome A5 est logiquement valide.

Démonstration: Raisonnons par l'absurde.
Supposons que $(\forall v)(B \supset A(v)) \supset (B \supset (\forall v)A(v))$ ne soit pas valide. Il existe donc une interprétation I telle que:

$$\mathrm{val}(\underbrace{(\forall v)(B \supset A(v))}_{*}) = \top \text{ et } \mathrm{val}(\underbrace{B \supset (\forall v)A(v)}_{**}) = \bot$$

* $(\forall v)(B \supset A(v))$ est donc vraie quelle que soit l'image de v, et par la clause 5 de la déf. 24:
⊠ $val(B \supset A(v)) = \top$

---

** La fausseté de l'expression $B \supset (\forall v)A(v)$ conduit à :
⊠⊠ $val(B) = \top$ et $val((\forall v)A(v)) = \bot$
Ceci revient à admettre l'existence d'une image de v pour laquelle:
⊠⊠⊠ $val(A(v)) = \bot$

L'hypothèse restrictive du schéma d'axiome A5 stipule que B ne contient pas v libre, donc peu importe l'image que l'interprétation attribue à v et l'on a toujours $val(B) = \top$.

En considérant ⊠ et ⊠⊠ on obtient : $val(A(v)) = \top$
ce qui contredit ⊠⊠⊠

METATHEOREME 19 - Tout théorème de L est logiquement valide:
Si $\vdash_L A$ alors $\models_L A$

Démonstration: Les schémas d'axiome A1-A3 fournissent des instances de tautologie dans L et sont donc logiquement valides[Mth. 16, p. 23].
Les schémas d'axiome A4 et A5 sont logiquement valides [Mth. 17, 18, pp. 23-24].
Les règles MP et GEN préservent la propriété "d'être logiquement valide" [Mth. 14, p. 22].

Q u e s t i o n :

55. Sous quelle condition relative au terme t, l'expression suivante est-elle logiquement valide? $\models p_1^1 t \supset (\exists v) p_1^1 v$

METATHEOREME 20 - L'expression $(\forall v_i)A(v_i) \equiv (\forall v_k)A(v_k)$ est un théorème si les deux conditions suivantes sont remplies:
1) $v_k$ est libre pour $v_i$ dans $A(v_i)$
2) $v_k$ ne figure pas libre dans $A(v_i)$

Q u e s t i o n s :

56. L'expression suivante satisfait-elle aux deux conditions du Mth. 20?
$(\forall v_1)(p_1^1 v_1 \supset (\forall v_3) p_1^2 v_2 v_3) \equiv (\forall v_4)(p_1^1 v_4 \supset (\forall v_3) p_1^2 v_2 v_3)$

57. Pourrait-on utiliser $v_2$ à la place de $v_4$? et $v_3$? et $v_5$?

58. La variable $v_i$ est-elle libre pour $v_k$ dans $A(v_k)$ ?

59. $A(v_k)$ contient-il $v_i$ libre ?

Démonstration du métathéorème 20

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(\forall v_i)A(v_i) \supset A(v_k)$ | A4, et condition 1 |
| 2. | $(\forall v_k)((\forall v_i)A(v_i) \supset A(v_k))$ | 1, GEN |
| 3. | $(\forall v_i)A(v_i) \supset (\forall v_k)A(v_k)$ | 2, A5 et condition 2 |
| 4. | $(\forall v_k)A(v_k) \supset A(v_i)$ | A4, et question 58 |
| 5. | $(\forall v_i)((\forall v_k)A(v_k) \supset A(v_i))$ | 4, GEN |
| 6. | $(\forall v_k)A(v_k) \supset (\forall v_i)A(v_i)$ | 5, A5, et question 59 |
| 7. | $(\forall v_i)A(v_i) \equiv (\forall v_k)A(v_k)$ | 3, 6, déf. "$\equiv$" |

Questions :

60. Relativement au nom des variables liées, que nous autorise ce métathéorème?

61. Comment satisfaire sans peine les conditions 1) et 2) du Mth. 20?

62. Une ebf fermée "dit"-elle quelque chose sur les variables qu'elle contient?

## 8. NON-CONTRADICTION ET CONSISTANCE DES SYSTEMES DU PREMIER ORDRE

Il est nécessaire de s'assurer que les systèmes du premier ordre purs sont non contradictoires. Pour le montrer il nous faut passer par une modification des ebf de L. Cette modification consiste à transformer toutes les ebf de L en des ebf qui se caractérisent par le fait qu'elles appartiennent au sous-langage $L^0$ de L. Il s'agit en quelque sorte d'une projection interne qui réduit l'écriture des expressions quantifiées à celle d'expressions qui, en plus des foncteurs logiques, ne contiennent <u>que</u> des prédicats de degré zéro.

Soit A une ebf quelconque de L. Nous appellerons <u>formule propositionnelle associée</u> (fpa) à A l'expression propositionnelle B obtenue en supprimant tous les termes de A et les quantificateurs de A, et en remplaçant chaque symbole de prédicat de degré $\underline{d}$, $\underline{d}>0$, par un symbole de prédicat de degré zéro. Il y a bien sûr quelques précautions à prendre, mais celles-ci sont triviales.

Précautions

- Remplacer chaque occurrence d'un prédicat de degré $\underline{d}$ : $\underline{d}>0$, par un même prédicat de degré zéro.
- Associer aux prédicats différents d'indice ou de degré ($\underline{d}>0$) des prédicats de degré zéro différents.
- Choisir pour les prédicats de degré zéro liés à la fpa à une ebf A des indices autres que l'indice d'un prédicat de degré zéro appartenant déjà à A.

| Exemples: | <u>ebf de L</u> | <u>fpa</u> |
|---|---|---|
| 1) | $(\forall v_1)(p_1^1 v_1 \supset p_2^1 v_1) \wedge p_1^1 v_1$ | $(p_3^0 \supset p_4^0) \wedge p_3^0$ |
| 2) | $(\forall v_1) p_1^2 v_1 c_1 \supset p_1^1 c_1$ | $p_1^0 \supset p_2^0$ |
| 3) | $(\forall v_1)(p_1^3 c_1 v_1 c_1 \supset p_6^0)$ | $p_5^0 \supset p_6^0$ |

Q u e s t i o n s :

63. Une ebf logiquement valide dans L peut-elle posséder une fpa qui est une tautologie?
64. Quelle est la fpa de A?
    $A =df (\forall v_1)(p_1^0 \supset p_1^2 v_1 c_1) \supset (p_1^0 \supset (\forall v_1) p_1^2 v_1 c_1)$

Avant d'exposer la démonstration de la non-contradiction du système L, il nous faut justifier le bien-fondé de la réduction de toute ebf de L en une fpa. Pour ce faire, considérons le système L ainsi qu'un domaine d'objets ne possédant qu'un et un seul élément: $\Omega = \{*\}$. Dans ce contexte, quelle que soit l'interprétation proposée, la situation est la suivante:

- Toute constante de L a pour image l'élément $*$.
- Toute variable de L a pour image l'élément $*$.
- Tout symbole de prédicat de degré zéro a pour image un élément du domaine des valeurs: soit $\top$, soit $\perp$.
- Tout symbole de prédicat de degré $\underline{d}$, $\underline{d}>0$, a pour image un élément de l'organisation relationnelle: $\wp(\Omega^d)$; construisons cette organisation:
  1. $\Omega = \{*\}$ $\wp(\Omega) = \{\Omega, \emptyset\}$
  2. $\Omega^2 = \{<*, *>\}$ $\wp(\Omega^2) = \{\{<*, *>\}, \emptyset\}$
  3. $\Omega^d = \underbrace{\{<*, *, \ldots, *>\}}_{\underline{d} \text{ fois}}$ $\wp(\Omega^d) = \{\{\underbrace{< *, *, \ldots, *>}_{\underline{d} \text{ fois}}\}, \emptyset\}$

  Il n'existe pas d'autres possibilités. Ainsi, dans une procédure interprétative liée à un domaine d'objets ne possédant qu'un unique élément, tout prédicat est lié au principe du double choix.
- Tout symbole de foncteur de degré $\underline{n}$, $\underline{n}>0$ a pour image un élément de l'organisation fonctionnelle $\wp(\Omega^n \times \Omega)$ dont les arguments sont composés avec l'unique élément de $\Omega$; il s'agit donc de : $\{<<*, *, \ldots, *>, *>\}$.

Il s'ensuit que:

I. Le quantificateur ne joue plus aucun rôle. Une formule quantifiée ne "dit" rien de plus que ce que "dit" le champ de son quantificateur. Le quantificateur est donc -dans ce cas- inutile. Nous le supprimerons donc.

II. D'autre part, il n'existe pour toute formule atomique $p_i^d\ t_1 \ldots t_d$ que deux -et seulement deux- évaluations possibles. Elle ne peut donc prendre qu'une fois la valeur $\top$, et qu'une fois la valeur $\perp$.
L'image d'un $p_i^d$ quelconque est soit $\emptyset$, soit $\underbrace{\{<*, *, \ldots, *>\}}_{\underline{d} \text{ fois}}$

L'évaluation de la formule atomique à laquelle il est associé ne considère donc que ces deux possibilités:

$$\mathrm{val}(p_i^d t_1 \ldots t_d) = \begin{cases} \top \text{ si } <\Psi_T(t_1), \ldots, \Psi_T(t_d)> \in \Psi_P(p_i^d). \text{ Càd dans le cas où } \Psi_P(p_i^d) = \underbrace{\{<*, *, \ldots, *>\}}_{\underline{d} \text{ fois}} \\ \perp \text{ si } <\Psi_T(t_1), \ldots, \Psi_T(t_d)> \notin \Psi_P(p_i^d). \text{ Et dans ce cas, } \Psi_P(p_i^d) = \emptyset \end{cases}$$

Une formule atomique se comporte donc comme un prédicat de degré zéro.

Voyons cela plus concrètement sur un exemple.

Soit A =df $p^2_1 c_1 v_1$ et $\Omega = \{*\}$ et étudions les 2 interprétations possibles.

| I'. | I". |
|---|---|
| $\Psi_C(c_1) \to *$ | $\Psi_C(c_1) \to *$ |
| $\Psi_C(v_1) \to *$ | $\Psi_C(v_1) \to *$ |
| $\Psi_p(p^2_1) \to \{<*, *>\}$ | $\Psi_p(p^2_1) \to \emptyset$ |

$$\begin{array}{c} <*, *> \\ \uparrow\ \uparrow \\ val(p^2_1 c_1 v_1) \\ \downarrow \quad \text{appartient-il à?} \\ \{<*, *>\} \leftarrow \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} <*, *> \\ \uparrow\ \uparrow \\ val(p^2_1 c_1 v_1) \\ \downarrow \quad \text{appartient-il à ?} \\ \emptyset \leftarrow \end{array}$$

oui! donc $val(p^2_1 c_1 v_1) = \top$ non! donc $val(p^2_1 c_1 v_1) = \bot$

Contre-exemple

Soit A =df $p^2_1 c_1 v_1$ et $\Omega' = \{*, \square\}$

En fonction des termes $c_1$ et $v_1$, il y a déjà quatre interprétations possibles.

| | | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ | $I_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Psi_C(c_1)$ | $\to$ | * | * | $\square$ | $\square$ |
| $\Psi_V(v_1)$ | $\to$ | * | $\square$ | * | $\square$ |

Et pour considérer le jeu des interprétations possibles pour $p^2_1$, il est nécessaire de construire $\mathcal{P}(\Omega'^2)$.

Q u e s t i o n :

65. Construire l'ensemble des parties de $\Omega'^2 : \mathcal{P}(\Omega'^2)$

Chacun des éléments de $\mathcal{P}(\Omega'^2)$ (question 65) est une image possible pour le prédicat $p^2_1$. Il possède donc 16 interprétations possibles.

Dans ce cas, l'ebf $p^2_1 c_1 v_1$ possède 4X16 = 64 interprétations possibles.

Elle ne se comporte donc pas, dans le processus interprétatif, comme un prédicat de degré zéro.

Ce qui précède justifie la transformation proposée.

METATHEOREME 21 - Le système formel L est non contradictoire.

Démonstration. La fpa de chacun des axiomes conçus sur les schémas d'axiome A1-A3 est logiquement valide. [Mth. 16]

La fpa d'un axiome conçu sur le schéma d'axiome A4 est logiquement valide.

Si A est une fpa, $A \supset A$ est un théorème et donc logiquement valide.

La fpa d'un axiome conçu sur le schéma d'axiome A5 est logiquement valide.

Si A et B sont des fpa, $(A \supset B) \supset (A \supset B)$ est un théorème et donc logiquement valide.

Le modus ponens préserve la propriété d'être logiquement valide pour les fpa. [Mth. 5]

La règle GEN préserve la propriété d'être logiquement valide pour les fpa. En effet la fpa à A et à $(\forall v)A$ est la même. La règle GEN se réduit à une règle de répétition.

Il suit de ce qui précède que tout théorème de L possède une fpa qui est logiquement valide.

Posons l'hypothèse absurde suivante: Dans L, on a à la fois A est un théorème et $\sim A$ est un théorème. Chacune de leur fpa B et $\sim B$ est donc logiquement valide: $\models B$ et $\models \sim B$. Ce résultat met en évidence que le fragment $L^0$ de L est contradictoire, ce qu'il n'est pas [Mth.9]. On ne peut donc avoir à la fois $\vdash A$ et $\vdash \sim A$. L est donc non contradictoire.

METATHEOREME 22 - Le système L est consistant.

Démonstration. Pour le montrer, il suffit d'exhiber une ebf de L qui ne soit pas un théorème. Mais nous savons que le fragment $L^0$ de L est consistant. Il en résulte que L l'est aussi.

Q u e s t i o n s

66. $L^0$ est décidable [Mth. 11]. En résulte-t-il que L est décidable?

67. Démontrer que ni $(\forall v)p_1^1 v$, ni $\sim(\forall v)p_1^1 v$ n'est un théorème de L.

METATHEOREME 23 - Le système L n'est pas catégorique [cf. déf. 17].

Démonstration. cf. question 67 et déf. 17

Variante - $L^0$ n'est pas catégorique, [cf. question 26, I] il en résulte que L ne l'est pas.

DEFINITION 29 -syntaxiquement complet- - Un système formel est syntaxiquement complet ssi aucun schéma d'ebf non prouvable dans le système ne peut lui être adjoint comme schéma d'axiome sans le rendre contradictoire. [Comparer avec déf. 16].

Nous montrerons que le système L n'est pas syntaxiquement complet alors que son fragment $L^0$ l'est. A cette fin, posons préalablement trois définitions et proposons un résultat: le métathéorème 24.

DEFINITIONS 30.1 -modèle- - Une interprétation I est un modèle pour une ebf A d'un système S si et seulement si val(A) = T relativement à I.

30.2 - Une interprétation I est un modèle pour un ensemble Γ d'ebf d'un système S si et seulement si toute $A_1 \in \Gamma$ est telle que val($A_1$) = T relativement à I.

30.3 - Un système du premier ordre possède un modèle si et seulement si l'ensemble de ses théorèmes en possède un. [Comparer avec déf. 8].

METATHEOREME 24 - Tout système du premier ordre qui admet un modèle est non contradictoire.

Démonstration. Soit S un système formel du premier ordre qui possède un modèle I.
Supposons [hypothèse absurde] que S soit contradictoire.

Il existe donc une ebf A telle que $\vdash_S A$ et $\vdash_S {\sim}A$.
L'ensemble des théorèmes de S ayant un modèle, il en résulte qu'il existe une interprétation I telle que $val_I(A) = \top$ et $val_I({\sim}A) = \top$. Mais, quelle que soit l'interprétation, $val({\sim}A) = \top$ ssi $val(A) = \bot$ . Ceci est également valable pour l'interprétation I. Il n'est donc pas possible d'obtenir simultanément $val_I({\sim}A) = \top$ et $val_I(A) = \top$ . L'hypothèse absurde était bien absurde et le système S est non contradictoire.

COROLLAIRE Un système formel contradictoire n'admet pas de modèle.

Q u e s t i o n :
68. Comment justifier ce corollaire?

Le métathéorème 24 est très puissant. En effet, soit S un système appliqué du premier ordre. On sait que sa "partie purement logique", c'est-à-dire L, est non contradictoire [Mth. 21]. Il suffira donc de trouver un seul modèle pour ses axiomes propres pour savoir que S est non contradictoire.

METATHEOREME 25 - Le système L n'est pas syntaxiquement complet.

Démonstration: Considérons le schéma d'ebf $A \supset (\forall v)p^1 v$ où A est une expression fermée quelconque. Ce schéma n'est pas prouvable dans L.
En effet, supposons qu'il le soit: $\vdash A \supset (\forall v)p^1 v$. Il s'ensuit que $\models A \supset (\forall v)p^1 v$ [Mth. 20]. Cela signifie que $val(A \supset (\forall v)p^1 v) = \top$ pour toute interprétation. Il est donc nécessaire que $val((\forall v)p^1 v)$ conserve la valeur $\top$ quelle que soit l'interprétation, mais ceci n'est pas le cas [question 67]. Ce schéma peut être adjoint aux schémas d'axiome de L sans le rendre pour autant contradictoire.
En effet, soit I, une interprétation dont le domaine d'objets $\Omega$ est l'ensemble de tous les termes ne possédant aucune variable. Attribuons à $p^1$ une image qui soit l'ensemble de tous les termes ne possédant aucune variable, donc $\Omega$ lui-même [en compréhension: "possède la propriété d'être un terme ne possédant aucune variable"].
Dans cette interprétation, $val(p^1 v) = \top$ quelle que soit l'image de la variable v. Donc $val((\forall v)p^1 v) = \top$ relative-

ment à l'interprétation I. Et davantage encore, $val(A \supset (\forall v)p^1v) = \top$ relativement à l'interprétation I.
Considérons le système L* conçu sur le système L auquel on adjoint comme nouveau schéma d'axiome, le schéma $A \supset (\forall v)p^1v$.

$$L^* : L + \underbrace{A \supset (\forall v)p^1v}_{\text{schéma d'axiome}}$$

Les schémas d'axiome A1-A5 sont logiquement valides.
Le modus ponens conserve la validité logique quelle que soit l'interprétation, donc également pour I.
La règle GEN conserve la validité logique quelle que soit l'interprétation, donc également pour I.
Le schéma d'axiome $A \supset (\forall v)p^1v$ a la valeur $\top$ relativement à I.
Il résulte que l'ensemble des théorèmes de L* est un ensemble dont tous les éléments ont la valeur $\top$ relativement à I.
I est donc un modèle pour L* [déf. 30.3]. Et possédant un modèle, L* est donc non contradictoire [Mth. 24].
Il est donc possible d'adjoindre à L comme schéma d'axiome, un schéma d'ebf non prouvable dans L, sans rendre pour autant le système non contradictoire.
Le système L n'est pas syntaxiquement complet.

METATHEOREME 26 - Le fragment $L^0$ de L est syntaxiquement complet.

Démonstration: Soit A, un quelconque schéma d'ebf non prouvable dans $L^0$, et soit $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ses n composants schématiquement distincts. Le schéma A ne peut pas être un schéma de tautologie [contraposée du Mth. 10]. Il existe donc une intepprétation I pour laquelle $val(A) = \perp$. Considérons le système $L^0*$ dans lequel le schéma A est un schéma d'axiome ( ce n'est pas le cas dans $L^0$). Dans ce système toute expression résultant de A par substitution d'ebf aux $B_i$ est un axiome. Considérons une telle transformation. Soit C l'axiome résultant du schéma d'axiome A par la substitution suivante:
$B_i/p^0 \supset p^0$ si $val(B_i) = \top$ relativement à I.
$B_i/\sim(p^0 \supset p^0)$ si $val(B_i) = \perp$ relativement à I.
L'ebf C est un théorème (axiome) de $L^0*$. Mais quelle que soit l'interprétation considérée [$val(p^0) = \top$ ou $val(p^0) = \perp$],

val(C) = $\perp$. Il en résulte [déf. 24, clause 3] que val(~C) = $\top$ quelle que soit l'interprétation: $\models$~C. Il s'ensuit que ~C est un théorème: $\vdash$~C [Mth. 10].
Ainsi dans $L^0$*, on a $\vdash$C et $\vdash$~C. $L^0$* est donc contradictoire.
Le schéma A était un schéma d'ebf non prouvable quelconque dans $L^0$. $L^0$ est donc syntaxiquement complet.

## 9. LA COMPLETUDE SEMANTIQUE DU SYSTEME L

Il s'agit maintenant de montrer que les ebf logiquement valides de L sont précisément les théorèmes de L. Cette démonstration nécessite un long détour. Nous devons en effet établir certains résultats qui dépassent "en puissance" l'étude du système L. Notre exposé se déroulera donc en quatre temps.

1. Où il sera question de l'extension d'un système formel et de la propriété d'"être dénombrable".
2. Où il sera montré que pour tout système S non contradictoire, il existe une extension non contradictoire et catégorique relativement à la fermeture.
3. Où il sera établi que tout système formel S non contradictoire possède un modèle dénombrable.
4. Où la complétude sera enfin démontrée.

Si nous insistons tant sur ce cheminement, c'est pour que l'on n'oublie pas la finalité de l'exposé.

### 9.1 Extension et "dénombrabilité"

DEFINITION 31 - Un système S* est une extension d'un système S ssi
-extension-
1/ S* a mêmes symboles et mêmes règles que S.
2/ Tout théorème de S est un théorème de S*, et pas inversement.

Q u e s t i o n s :

69. Le système L est-il une extension du système $L^0$?
70. Une extension quel type de liberté?
Autrement dit, que faut-il ajouter à un système formel S pour obtenir une extension?
71. Peut-on obtenir une extension non contradictoire de $L^0$? et de L?

LEMME I - Si $\sim A$ est une ebf fermée de S telle que $\not\vdash_S \sim A$, alors l'extension S* de S obtenue en adjoignant A aux axiomes de S est non contradictoire.

Démonstration: Supposons S* contradictoire [hyp. absurde]. Il existe alors une ebf B de S* telle que:

$$(*) \quad \vdash_{S^*} B \qquad \text{et} \qquad \vdash_{S^*} \sim B.$$

Cette contradiction résulte de la présence de A comme axiome de S*. En effet, on a $\vdash_S (B \supset (\sim B \supset \sim A))$ donc on a également [déf. 31]

$$(**) \quad \vdash_{S^*} (B \supset (\sim B \supset \sim A)).$$

Il résulte de (*) et (**) par deux applications de la règle MP que $\vdash_{S^*} \sim A$. D'autre part, l'expression $\sim A$ est prouvable dans S* parce que A est un axiome de ce système.
Il est donc possible de déduire $\sim A$ dans S à partir de l'ensemble d'hypothèses $\Gamma : \Gamma = \{A\}$.

$$A \vdash_S \sim A$$

L'expression A étant fermée, on peut utiliser le "théorème" de la déduction et obtenir

$$(+) \quad \vdash_S A \supset \sim A$$

Mais $(A \supset \sim A) \supset \sim A$ est un schéma de théorème de S:

$$(++) \quad \vdash_S (A \supset \sim A) \supset \sim A.$$

Il résulte que (+) et (++) par application de la règle MP que $\vdash_S \sim A$.

Ce résultat contredit l'hypothèse du Lemme I ($\sim A$ n'est pas prouvable dans S: $\not\vdash_S \sim A$).
Ainsi l'extension S* de S obtenue en adjoignant A aux axiomes de S est non contradictoire.

Question :

72. A-t-on restreint -et en quoi- la portée du Lemme I en supposant A fermée?

LEMME II - L'ensemble des ebf d'un système formel est dénombrable (on dit aussi énumérable).

Remarques :

1. Nous exposerons ce résultat en nous basant sur l'existence des symboles de L. L'esprit de la démonstration est le même pour un quelconque système formel appliqué.

2. Il est nécessaire de se convaincre de l'existence d'une infinité de nombres premiers. Nous démontrerons ce résultat.
3. Il est nécessaire d'accepter le résultat arithmétique suivant:

> Tout nombre entier est le produit des puissances des nombres premiers qui le divisent; cette décomposition est unique à l'ordre près. (On parle de factorisation en produit de nombres premiers).

Conventions: soit q un nombre naturel;

$q^1 = q$; $q^0 = 1$ (q puissance 1, q puissance 0)

Rappel: Un nombre premier est un entier naturel qui possède exactement deux diviseurs: lui-même et 1.

La table des nombres premiers a été prolongée en 1979 jusqu'au cent millionième nombre premier qui est 2 038 074 743. [*Dictionnaire des mathématiques*. A. Bouvier et M. George, PUF, 1979].

THEOREME DE L'INFINITE DES NOMBRES PREMIERS -

Il existe une infinité de nombres premiers. Nous donnons la preuve d'Euclide [*Eléments*, IX. 20], elle est élégante et facile à comprendre.

Démonstration: Hyp. absurde: il existe un plus grand nombre premier, soit $p_m$ ce nombre.

Nous allons montrer qu'il en existe un plus grand.

1. Construisons le nombre q formé en additionnant 1 au produit de tous les nombres premiers jusqu'à $p_m$. $q = (p_1 \bullet p_2 \bullet \ldots \bullet p_m)+1$
2. Le nombre q est plus grand que $p_m$.
3. Quel que soit le nombre premier $p_i$ (ou quel que soit le produit de nombres premiers $p_1 \bullet p_2 \bullet \ldots \bullet p_i$) pris comme diviseur, le quotient consistera en un produit de nombres premiers, et il restera toujours le reste 1. Le nombre q ne peut donc pas être factorisé en un produit de nombres premiers.
4. Mais le nombre q est ou non un nombre premier.

4.1 Si le nombre q est un nombre premier, il existe donc un nombre premier plus grand que $p_m$ [cf. 2].

4.2 Si le nombre q n'est pas un nombre premier, il peut être factorisé en produit de nombres premiers. Ce qui n'est pas le cas [cf. 3].

5. Il existe donc un nombre premier plus grand que $p_m$.

La numérotation de Gödel

La démonstration du Lemme 2 passe par l'établissement de la numérotation de Gödel. L'idée est la suivante: assigner des entiers de manière systématique à tout assemblage fini de symboles, si long soit-il, qui forme les ebf de L.

> On peut créditer Leibniz d'une anticipation de l'idée de représenter les expressions d'un langage par des nombres entiers. (Dieudonné, 1978).

Première démarche - Attribution d'un nombre de Gödel à chaque symbole de l'alphabet de L [le nombre de Gödel d'un symbole est appelé un g-nombre].
Il s'agit d'une application g qui à chaque symbole de l'alphabet de L attribue un nombre univoquement déterminé:

$$g : \{\text{symboles de } L\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$g:\ ( \longmapsto 3$

$g:\ ) \longmapsto 5$

$g:\ \sim \longmapsto 7$

$g:\ \supset \longmapsto 9$

$g:\ \forall \longmapsto 11$

$g:\ c_i \longmapsto 5+8.i \qquad i>0$

$g:\ v_i \longmapsto 7+8.i \qquad i>0$

$g:\ p_i^n \longmapsto 9+8.(2^n.3^i) \qquad n\geqslant 0 \quad \text{et} \quad i>0$

$g:\ f_i^n \longmapsto 11+8.(2^n.3^i) \qquad n>0 \quad \text{et} \quad i>0$

Cette application n'est pas la seule possible. Toutes les applications envisageables doivent posséder la même propriété, à savoir: ne pas attribuer à deux symboles de l'alphabet une même image.

Exemples:

$g(c_1) = 5+8.1 = 13$; 13 est le g-nombre de $c_1$

$g(p_3^2) = 9+8.(2^2.3^3) = 873$; 873 est le g-nombre de $p_3^2$

Q u e s t i o n s :

73. Calculer les g-nombres de $c_2$ et de $f_2^2$.
74. Le nombre 72 est-il le g-nombre d'un symbole de l'alphabet de L? et 81? Si oui, duquel?

Deuxième démarche - Attribution d'un nombre de Gödel à chaque ebf de L.
Toute ebf se présente comme une concaténation de symboles $s_i$ de l'alphabet de L.

Soit A : $s_1 \; s_2 \; s_3 \; \text{---} \; s_k$

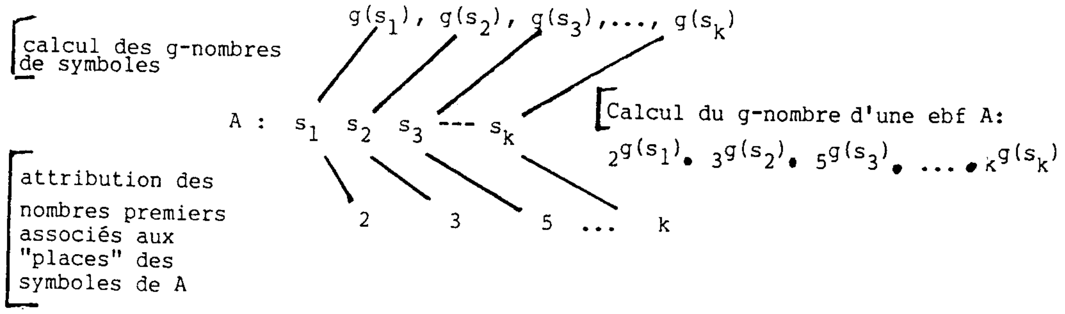
I. Chaque symbole possède une "place" bien déterminée dans une ebf. A la première place, nous attribuons le premier nombre premier, à la deuxième place, nous attribuons le deuxième nombre premier,..., à la k-ième place nous attribuons le k-ième nombre premier.

première place: $\longmapsto$ 2 premier nombre premier
deuxième place: $\longmapsto$ 3 deuxième nombre premier
:
k-ième place $\longmapsto$ k le k-ième nombre premier

II. Indépendamment de la place des symboles, chaque symbole possède un nombre de Gödel univoquement déterminé.

$s_1 \longmapsto g(s_1)$
$s_2 \longmapsto g(s_2)$
:
$s_k \longmapsto g(s_k)$

A l'aide de ces deux informations (I et II), il est possible de déterminer le nombre de Gödel d'une expression. Cette démarche s'effectue ainsi.



Le g-nombre d'une expression A possédant k symboles est le produit des k premiers nombres, chacun étant élevé à la puissance du g-nombre du symbole associé à sa place.

Exemples

1) $A =df\ (\forall v_1)p_1^1 v_1$

$$g(A) = 2^{g(()}.3^{g(\forall)}.5^{g(v_1)}.7^{g())}.11^{g(p_1^1)}.13^{g(v_1)}$$

$$= 2^3.3^{11}.5^{(7+8)}.7^5.11^{(9+8(2.3))}.13^{(7+8)}$$

$$= n \in \mathbb{N}$$

2) $75000 = 2^3 .\ 3^1 .\ 5^5$

3 est le g-nombre de (

1 n'est pas un g-nombre

5 est le g-nombre de )

75000 n'est pas un g-nombre associé à une ebf de L .

3) $2^7 .\ 3^{13} .5^3$

7 est le g-nombre de ~

13 est le g-nombre de $c_1$

3 est le g-nombre de (

$2^7 .3^{13} .5^3$ est un g-nombre, mais pas d'une ebf de L.

Q u e s t i o n s :

75. Calculer le nombre de Gödel de $p_1^0 \supset p_1^0$
76. Calculer le nombre de Gödel de $p_1^1 v_1 \supset p_1^2 c_1 c_2$
77. $2^{81}$ est-il le nombre de Gödel d'une ebf?
78. Quelle distinction de nature y a-t-il entre le g-nombre 81 et le g-nombre $2^{81}$ ?

L'unicité, à l'ordre près, d'une factorisation en produit de nombres premiers et l'existence d'une infinité de nombres premiers garantissent que toute ebf possède un et un seul g-nombre, et que ce g-nombre n'est attribué qu'à cette ebf.

Tout g-nombre d'une expression étant un entier naturel, il est possible d'ordonner l'ensemble des g-nombres des ebf. Au premier g-nombre attribuons le premier nombre naturel 1; au deuxième, le deuxième nombre naturel 2; ...; au k-ième, le k-ième nombre naturel. Agissant ainsi nous établissons une correspondance bi-univoque entre les g-nombres des ebf et $\mathbb{N}$. L'ensemble des ebf de L est donc dénombrable.

## 9.2 Extension - non-contradiction - catégoricité

DEFINITION 32 - -catégoricité relativement à la fermeture- Un système du premier ordre est catégorique relativement à la fermeture ssi pour chacune de ses ebf fermées A, on a soit $\vdash A$, soit $\vdash \sim A$.

METATHEOREME 27 - Si S est un système du premier ordre non contradictoire il existe une extension S* de S qui est non contradictoire et catégorique relativement à la fermeture.

Démonstration: Considérons l'énumération des ebf fermées de S. Elle est possible [Lemme II, p. 35].

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots \rangle$$

Construisons une suite de systèmes formels

$$\langle S^0, S^1, S^2, \ldots, S^n, S^{n+1}, \ldots \rangle$$

conçus de la manière suivante:

1. $S^0 = S$

$$\begin{cases} 2.1 \quad S^{n+1} = S^n & \text{si } \vdash_{S^n} \sim A_{n+1} \\ 2.2 \quad S^{n+1} = S^n + A_{n+1} & \text{si } \nvdash_{S^n} \sim A_{n+1}. \end{cases}$$

Dans le cas 2.2, le système $S^{n+1}$ est une extension de $S^n$, extension réalisée en ajoutant $A_{n+1}$ aux axiomes de $S^n$.

Supposons [ce qui est totalement arbitraire] que l'énumération des ebf fermées de S commence comme suit:

$A_1 = p_1^0$, $A_2 = p_1^0 \wedge \sim p_1^0$, $A_3 = p_1^1 c_1, \ldots$

1. On a : $S^0 = S$ clause 1) puis, comme $\sim p_1^0$ n'est pas un théorème de $S^0$ : $\nvdash_{S^0} \sim p_1^0$,
2. on obtient : $S^1 = S^0 + p_1^0$ clause 2.2). Ensuite, $\sim(p_1^0 \wedge \sim p_1^0)$ est un théorème de $S^0$, il est donc -par définition d'une extension- également théorème de l'extension $S^1$: $\vdash_{S^1} \sim(p_1^0 \wedge \sim p_1^0)$.
3. Il en résulte: $S^2 = S^1$ clause 2.1). Si l'on montre que la négation de la troisième ebf fermée n'est pas un théorème de $S^2$, on aura alors

4. $S^3 = S^2 + \overset{1}{p_1 c_1}$ clause 2.2) etc.

Considérant la suite des systèmes formels $<S^0, S^1, S^2, \ldots, S^n, \ldots>$ formons un nouveau système formel S*. Ce système est obtenu à partir de S en ajoutant tous les axiomes qui ont engendré les $S^i$. Sous ces conditions:

a] S* est une extension de S. En effet, S* a mêmes symboles et mêmes règles que S et tout théorème de S est un théorème de S*.

b] S* est non contradictoire.

Démonstration: par induction sur l'indice i des $S^i$.

Base : $i = 0$

$S^0$ est S et S est supposé non contradictoire.

Hypothèse d'induction: $S^i$ est non contradictoire.

Pas d'induction: Montrons que le système suivant $S^{i+1}$ est aussi non contradictoire. Il y a deux cas à étudier:

1] $\sim A_{i+1}$ est un théorème de $S^i$. Il en résulte que $S^{i+1} = S^i$. $S^i$ est non contradictoire [hyp. d'induction] donc $S^{i+1}$ est non contradictoire.

2] $\sim A_{i+1}$ n'est pas un théorème de $S^i$. Dans ce cas $S^{i+1} = S^i + A_{i+1}$. $S^{i+1}$ est non contradictoire [Lemme I].

c] S* est catégorique relativement à la fermeture.

Démonstration: Soit B une ebf fermée quelconque de S*. Elle est nécessairement dans la liste $<A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots>$.
Admettons qu'il s'agisse de $A_{k+1}$. Deux situations sont possibles:
ou bien $\sim A_{k+1}$ est un théorème dans $S^k$
ou bien il ne l'est pas et $A_{k+1}$ est un théorème (axiome de $S^{k+1}$).

Etant donné que S* contient toutes les ebf rajoutées comme axiomes, on a bien
soit $\vdash_{S^*} A_{k+1}$ , soit $\vdash_{S^*} \sim A_{k+1}$

DEFINITION 33 - -théorie axiomatique- Une théorie dans laquelle l'ensemble des axiomes est décidable est appelée une théorie axiomatique.

Le système L est une théorie axiomatique.

Remarques:

- La preuve du métathéorème 27 ne permet pas de construire effectivement S*. Il se peut en effet que l'on ne puisse pas décider si une ebf $\sim A_{k+1}$ est ou n'est pas un théorème de $S^k$. Le système S* peut ne pas être une théorie axiomatique.
- Le métathéorème 27 est connu dans la littérature comme le lemme de Lindenbaum. "Selon un théorème bien connu, dû à A.Lindenbaum, tout un ensemble de propositions [non contradictoire] d'une théorie déductive quelconque peut être étendu pour former un système à la fois [catégorique relativement à la fermeture] et [non contradictoire]." [TARSKI, 1974, II, p. 123].

  Dans le premier tome Tarski démontre ce théorème [th. 56] et ajoute le commentaire suivant:

  > "...bien que tous les systèmes [non contradictoires] que l'on connaisse soient [non catégoriques relativement à la fermeture], le théorème 56 offre, au moins une possibilité théorique, d'étendre ces systèmes pour qu'ils deviennent à la fois [catégoriques relativement à la fermeture] et [non contradictoires]. La question se pose alors de savoir comment cette extension peut être construite pour être "effective", aussi naturelle que possible, et en même temps s'accorder avec tel ou tel point de vue philosophique". [1974, I, p. 102; première publication 1930].

- Nous avons modifié la terminologie utilisée par Tarski afin de ne pas introduire de confusion. En effet, les termes tels que "complétude", "consistance" n'ont pas chez Tarski la même acception que celle que nous leur avons attribuée. Ajoutons que cette malheureuse divergence terminologique est très générale.

### 9.3 Non-contradiction - modèle - "dénombrabilité"

METATHEOREME 28 - Tout système du premier ordre S qui est non contradictoire possède un modèle et ce modèle est dénombrable.

Démonstration:

I. Construction d'un système non contradictoire $S^0$ à partir de S.

II. "Construction" d'une extension non contradictoire $S^\infty$ de $S^0$ puis d'une extension S* de $S^\infty$, non contradictoire et catégorique relativement à la fermeture.

III. Construction d'un modèle I de S*, modèle dénombrable.

IV. Démonstration que le modèle dénombrable I de S* est également un modèle de S.

I.1 Construction d'un système $S^0$ à partir de S. Soit $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ une liste dénombrable de constantes d'objet toutes différentes des $c_i$ de S. Posons alors:

$$S^0 = S + \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

Q u e s t i o n s:

79. $S^0$ est-il une extension de S?

80. $S^0$ a-t-il d'autres schémas d'axiome que S? d'autres axiomes?

I.2 $S^0$ est non contradictoire.

Démonstration: Supposons $S^0$ contradictoire [hyp. absurde]. Il existe donc une ebf A telle que $\vdash_{S^0} A \wedge \sim A$. Cela signifie que dans $S^0$, on a une preuve de $A \wedge \sim A$. A partir de cette preuve, opérons la transformation suivante: chaque fois qu'on rencontre une constante $a_i$, on la remplace par une $v_j$ qui ne figure nulle part dans la preuve. On obtient donc ainsi une preuve dans S d'une expression $A' \wedge \sim A'$. S serait donc contradictoire, ce qui est incompatible avec l'hypothèse du métathéorème 28. $S^0$ est donc non contradictoire.

II.1 Construction d'une extension non contradictoire $S^\infty$ de $S^0$. Enumérons les ebf de $S^0$ qui ne possèdent qu'une seule variable libre [le lemme II, p. 35 rend ceci possible]:

a] $A_1(v_{i_1}), A_2(v_{i_2}), \dots, A_k(v_{i_k}), \dots$

Donnons-nous une liste de constantes propres à $S^0$ et qui ne figurent pas dans les $A_k$:

b] $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_k}, \dots$

Soit alors l'ebf suivante:

c] $s_k =df \sim(\forall v_{i_k}) A_k(v_{i_k}) \supset \sim A_k(a_{j_k})$ .

Construisons maintenant une suite de systèmes $S^n$ ainsi:

$S^n = S^0 + s_1 + s_2 + \dots + s_n$ [le système $S^0$ auquel on ajoute les n premiers $s_k$ considérés comme axiomes]

Concevons alors le système $S^\infty$ de la manière suivante:

$$S^\infty = S^0 + \underline{\text{tous}} \text{ les } s_i.$$

Q u e s t i o n s :

81. Quels sont les axiomes de $S^2$?
82. $S^\infty$ est-il une extension de S? de $S^2$?
83. Pourquoi peut-on garantir qu'une preuve dans $S^\infty$ est toujours dans un $S^n$ où $\underline{n}$ est fini?

Démontrons que cette extension $S^\infty$ est non contradictoire.

Démonstration: par induction sur l'indice $\underline{n}$ des $S^n$.

Base : $n = 0$
$S^0$ est non contradictoire [I.2].

Hypothèse d'induction: $S^n$ est non contradictoire.

Pas d'induction: Prouvons que $S^{n+1} = S^n + s_{n+1}$ est non contradictoire.
Raisonnons par l'absurde.

Si $S^{n+1}$ est contradictoire [hyp. absurde] il existe une ebf A telle que $\vdash_{S^{n+1}} A \wedge \sim A$.

Mais $S^{n+1}$ contient les théorèmes de $S^0$ qui, à son tour, contient les théorèmes de S; on a donc $\vdash_{S^{n+1}} (A \wedge \sim A) \supset B$, et ceci quelle que soit l'ebf B, et par la règle MP on obtient: $\vdash_{S^{n+1}} B$, quelle que soit B.

Donc en particulier: $\vdash_{S^{n+1}} \sim s_{n+1}$ .

La construction de $S^{n+1}$ à partir de $S^n$ est telle que $\sim s_{n+1}$ est déductible de $s_{n+1}$ dans $S^n$: $\qquad s_{n+1} \vdash_{S^n} \sim s_{n+1}$ .

L'expression $s_{n+1}$ étant fermée [cf. construction], on peut utiliser le "théorème" de la déduction et obtenir:

1] $\vdash_{S^n} s_{n+1} \supset \sim s_{n+1}$

Mais on a aussi dans S donc dans $S^0$ et dans $S^n$ le théorème suivant: $\vdash_{S^n} (C \supset \sim C) \supset \sim C$ quelle que soit C, et en particulier:

2] $\vdash_{S^n} (s_{n+1} \supset \sim s_{n+1}) \supset \sim s_{n+1}$ .

On obtient donc : $\qquad \vdash_{S^n} \sim s_{n+1} \qquad$ 1], 2], MP

c'est-à-dire: $\qquad \vdash_{S^n} \sim[\sim(\forall v_{i_{n+1}}) A_{n+1}(v_{i_{n+1}}) \supset \sim A_{n+1}(a_{j_{n+1}})]$

ce qui peut se transformer en:

$$(*) \quad \vdash_{S^n} \sim(\forall v_{i_{n+1}}) A_{n+1}(v_{i_{n+1}}) \wedge A_{n+1}(a_{j_{n+1}})$$

Q u e s t i o n:

84. Comment justifier cette transformation?

La règle $\Lambda$e offre la possibilité d'obtenir, partant de (*) les deux théorèmes suivants:

$$(**) \quad \vdash_{S^n} \sim(\forall v_{i_{n+1}})\, A_{n+1}(v_{i_{n+1}})$$

et

$$\vdash_{S^n} A_{n+1}(a_{j_{n+1}})$$

Dans la preuve de cette dernière expression, remplaçons chaque mention de $a_{j_{n+1}}$ par une variable v qui ne figure nulle part dans la preuve. On a donc une preuve dans $S^n$ dont la dernière ligne est $A_{n+1}(v)$.

Soit: $\vdash_{S^n} A_{n+1}(v)$ et par GEN :

$$(***) \quad \vdash_{S^n} (\forall v) A_{n+1}(v)$$

Q u e s t i o n s :

85. $v_{i_{n+1}}$ est-elle libre pour v dans $A_{n+1}$ ?

86. A(v) contient-elle $v_{i_{n+1}}$ libre ?

Le métathéorème 20 permet de changer dans (***) la variable liée v et d'écrire:

$$\vdash_{S^n} (\forall v_{i_{n+1}}) A_{n+1}(v_{i_{n+1}})$$

ce qui est contradictoire avec (**). Ce résultat va à l'encontre de l'hypothèse d'induction. $S^\infty$ est donc non contradictoire.

II.2 Construction d'une extension $S^*$ de $S^\infty$ , non contradictoire et catégorique relativement à la fermeture.

$S^\infty$ étant un système non contradictoire, il admet donc une extension $S^*$ non contradictoire et catégorique relativement à la fermeture [Mth. 27]

## III. Construction d'un modèle I de S*, modèle dénombrable.

Dans un premier temps, nous établirons une interprétation dénombrable, puis nous montrerons qu'une telle interprétation est un modèle du système S*.

### III.1 Construction d'une interprétation I.

L'interprétation doit fournir un domaine d'objets $\Omega$ dénombrable, le domaine des valeurs V et les applications $\Psi$ [cf. déf. 23].

DEFINITION 34 - Un terme fermé est un terme qui ne contient aucune variable.
-terme fermé-

Choix de $\Omega$ : l'ensemble des termes fermés de $S^0$. Il s'agit bien d'un ensemble dénombrable (pourquoi?)

Choix de V : comme toujours $\{\top, \bot\}$ . Et les applications $\Psi$.

1] Si b est une constante (donc un $c_i$ ou un $a_j$) alors $\Psi_C(b) = b$.
L'image d'une constante est cette constante elle-même.

2] L'image de $f_i^n t_1 \dots t_n$ où $t_1, t_2, \dots, t_n$ sont des termes fermés de $S^0$, est le terme fermé $f_i^n t_1 \dots t_n$ lui-même.

3] L'interprétation I assigne la valeur $\top$ à $p_i^0$ ssi $\vdash_{S^*} p_i^0$.

4] L'interprétation I assigne la valeur $\top$ à $p_i^n t_1 \dots t_n$ où $t_1, t_2, \dots, t_n$ sont des termes fermés de $S^0$ ssi $\vdash_{S^*} p_i^n t_1 \dots t_n$.

Q u e s t i o n s :

87. L'ensemble des termes fermés de S* et celui de $S^0$ sont-ils égaux?

88. Pour quelle raison, dans le cas 2 par exemple, négligeons-nous de passer par les applications $\Psi_T(t_i)$ ?

89. Dans quelle condition aura-t-on $val(p_i^0) = \bot$ ? et $val(p_i^n t_1 \dots t_n) = \bot$ ?

<u>R e m a r q u e</u>:

Il peut paraître surprenant que nous ayons omis de traiter des variables et donc des termes non fermés. En voici la raison. L'image d'une variable $v_i$ par l'application $\Psi_V$ serait un terme fermé de $S^0$. Mais ce terme fermé en tant qu'objet dans le domaine $\Omega$ est aussi un terme fermé dans le système S* et il sera de toute façon interprété. Ainsi, le choix du domaine des objets $\Omega$ permet de réduire les applications aux seuls termes fermés de S*, c'est-à-dire à ses constantes.

III.2 I est un modèle dénombrable de S*.

Revenons à l'interprétation I et montrons qu'elle est bien un modèle de S*. Il suffira d'établir que, quelle que soit l'ebf fermée A,

$\vdash_{S^*} A$ ssi $val_I(A) = \top$ [cf. déf. 30.3].

Q u e s t i o n :

90. Pour quelle raison avons-nous à ne considérer que les ebf fermées de S*?

Démonstration de III.2: Elle se fait par induction sur le nombre n des connecteurs de A.

Base: $n = 0$

Dans ce cas, deux possibilités seulement sont présentes:

- A est un symbole de prédicat de degré zéro $p_i^0$

ou - A est de la forme $p_i^d t_1 \ldots t_d$ où les $t_i$ sont des termes fermés.

Dans l'un et l'autre cas: $val_I(A) = \top$ ssi $\vdash_{S^*} A$ [clauses 3) et 4) des applications $\Psi$, p. 46].

Hypothèse d'induction: L'interprétation I est un modèle pour toute ebf fermée qui contient au plus n connecteurs.

Pas d'induction : Montrons que l'interprétation I est un modèle pour toute ebf fermée A possédant n+1 connecteurs.

Trois cas sont à considérer:

1] A est $\sim B$

2] A est $B \supset C$

3] A est $(\forall v_i)B$

Cas 1] : A est $\sim B$ et B est fermée puisque A l'est.

($\rightarrow$) 1.1 $val_I(A) = \top$ donc $val_I(B) = \bot$ et par hypothèse d'induction $\nvdash_{S^*} B$.
Comme S* est catégorique relativement à la fermeture, et que B est une ebf fermée $\vdash_{S^*} \sim B$.
Et $\sim B$ est A, donc $\vdash_{S^*} A$.

($\leftarrow$) 1.2 $\vdash_{S^*} A$. Il faut donc prouver que $val_I(A) = \top$.
Nous allons établir la contraposée :

si $val_I(A) \neq \top$ alors $\nvdash_{S^*} A$

On a : $val_I(A) \neq \top$ implique $val_I(A) = \bot$ et donc $val_I(B) = \top$