CENTRE DE RECHERCHES SÉMIOLOGIQUES

TRAVAUX DE LOGIQUE

Introduction à la théorie des systèmes formels

Deuxième partie

Denis Miéville

No 2 — Janvier 1987

CdRS

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL Quai Robert-Comtesse 2 2000 Neuchâtel (Suisse)

INTRODUCTION A LA THEORIE DES SYSTEMES FORMELS

(2ème partie)

Denis MIEVILLE

No 2 - janvier 1987

T A B L E DES M A T I E R E S

CHAPITRE 6 - LES FONCTIONS RECURSIVES

1. PREAMBULE

Il s'agit d'un vaste ensemble de systèmes formels qui d'une part, formalisent la logique des propositions et celle des prédicats et, d'autre part, permettent de formaliser différentes théories dont celle de l'arithmétique par exemple: la partie logique permettant en quelque sorte de calculer sur la théorie formalisée.

On désignera un système formel quelconque du premier ordre par le nom S. On opérera une distinction entre deux catégories de systèmes du premier ordre.

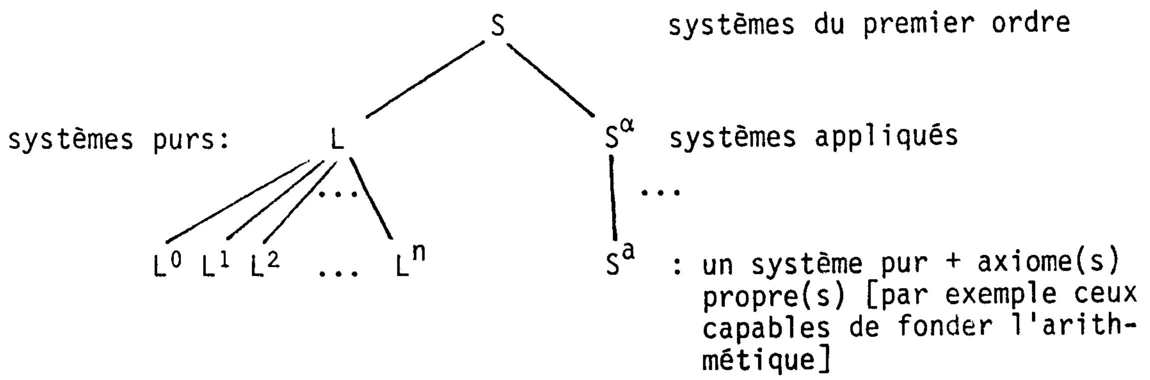
1. Il y a celle qui représente les systèmes logiques purs. Il s'agit d'un ensemble de systèmes conçus pour représenter par exemple:
- la logique des propositions: L^0;
- la logique des prédicats monadiques: L^1 (la logique des propriétés);
- la logique des prédicats binaires: L^2 (la logique des relations);

  ⋮

- la logique des prédicats n-aires: L^n.

On désignera un système quelconque de cette catégorie-là par le nom L.

2. Il y a la catégorie des systèmes du premier ordre qui constituent une expansion des systèmes logiques purs, expansion conçue de manière à représenter des théories appliquées. Ces systèmes, en plus des axiomes logiques, possèdent des axiomes extra-logiques caractérisant une théorie particulière. Ils possèdent ainsi des axiomes propres. On désignera un système quelconque de cette catégorie-là par le nom S^α.



Les systèmes du premier ordre contiennent donc L^0. Nous avons choisi de présenter ce système dans un chapitre séparé pour deux raisons:

1. Il nous semble raisonnable de présenter l'esprit et les concepts fondamentaux des systèmes formels à partir d'un système relativement simple.

2. La logique des propositions est d'une importance capitale, ce qui justifie d'en présenter séparément la formalisation.

R e m a r q u e. Les systèmes S sont du premier ordre parce qu'il est possible d'y représenter une quantification qui n'agit que sur des symboles qui seront interprétés comme des variables d'objet. Si, ce que nous ne ferons pas, la quantification agissait sur des variables de prédicat, le système serait du deuxième ordre et, du troisième ordre si elle agissait sur des variables de "prédicat de prédicat", etc.

2. LES QUATRE ENSEMBLES FONDAMENTAUX

2.1 L'alphabet $\mathscr{A}$

Il est constitué de l'union des ensembles suivants:

(1) Ensemble des constantes d'objet: $\{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$
Cet ensemble peut être vide: c'est souvent le cas pour la formalisation de la logique des prédicats. Il peut aussi ne contenir qu'un nombre fini d'éléments: pour formaliser l'arithmétique, un seul élément suffit.

(2) Ensemble des variables d'objet: $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots\}$
Elles constituent toujours, quand elles existent, un ensemble infini (dénombrable).

(3) Des ensembles de symboles de prédicat: $\{p_1^d, p_2^d, \ldots, p_n^d, \ldots\}$
L'indice supérieur $\underline{d}$ est le degré du symbole. Il peut varier de 0 à $\underline{k}$ quelconque. Pour formaliser la logique des propositions, nous n'avons considéré que les symboles de prédicat de degré zéro.

(4) Des ensembles de symboles de foncteur: $\{f_1^d, f_2^d, \ldots, f_n^d, \ldots\}$
L'indice supérieur $\underline{d}$ est le degré du symbole. Il peut varier de 1 à $\underline{k}$ quelconque.

(5) L'ensemble des connecteurs: $\{\sim, \supset, \forall\}$

(6) L'ensemble des parenthèses: {(,)}

Remarque. Chaque ensemble est spécifié en fonction du rôle que ses éléments joueront dans la démarche interprétative.

Conventions: c, c_i, c_j désignent une constante quelconque
v, v_i, v_j désignent une variable quelconque
p^d, p_i^d, p_j^d désignent un symbole quelconque de prédicat de degré d
f^d, f_i^d, f_j^d désignent un symbole quelconque de foncteur de degré d

Questions :

1. L'ensemble $\mathscr{A}$ est-il dénombrable?
2. L'ensemble $\mathscr{A}$ est-il décidable?
3. Que peuvent représenter les symboles de foncteur dans une interprétation?

2.2 L'ensemble des ebf: $\mathscr{E}$

Nous allons procéder en trois temps et définir successivement:

I. L'ensemble des termes.
II. L'ensemble des formules atomiques.
III. L'ensemble des ebf lui-même.

I. L'ensemble des termes

(1) Une constante d'objet est un terme.
(2) Une variable d'objet est un terme.
(3) Si f^d est un foncteur de degré d et si $t_1, t_2, \ldots, t_d$ sont des termes (pas nécessairement distincts), $f^d t_1 t_2 \ldots t_d$ est un terme.
(4) Rien n'est un terme sinon par ce qui précède.

Questions:

4. Ecrire quelques termes.
5. Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des termes?
c_4, $f_2^1 v_3$, v_4, $f_2^3 v_1 v_1 v_1$, $f_3^2 v_1 v_1 v_1$, $f_1^1 f_1^1 f_1^1 f_1^1 c_1$, $f_1^3 c_3 f_1^2 c_2 f_1^1 c_1 c_1$, f_1^2

6. Quels sont les termes dans la logique des propositions, dans la logique des prédicats?

II. L'ensemble des formules atomiques

(1) Si p^d est un prédicat de degré $\underline{d}$ et si t_1, $t_2, \ldots,$ t_d sont des termes (pas nécessairement distincts), $p^d t_1 t_2 \ldots t_d$ est une formule atomique.

(2) Rien n'est une formule atomique sinon par ce qui précède.

Q u e s t i o n s :

7. Ecrire quelques formules atomiques.
8. Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des formules atomiques?
$p_1^1 c_1$, $p_1^2 v_3 v_5$, c_3, $f_1^2 c_3 v_4$, p_1^0, $p_1^2 f_1^2 c_1 f_1^1 v_4 c_1$, $f_1^2 p_1^1 v_2 v_1$, $p_1^2 c_1 f_1^2 v_1 c_1$, $p_1^1 f_1^1 f_1^1 v_1$
9. Quelles sont les formules atomiques dans la logique des propositions, dans celle des prédicats?
10. En quoi se distinguent un terme et une formule atomique?

III. L'ensemble des expressions bien formées (ebf) : $\mathscr{E}$

(1) Une formule atomique est une ebf.

(2) Si A est une ebf, $\sim A$ est une ebf.

(3) Si A et B sont des ebf, $(A \supset B)$ est une ebf.

(4) Si A est une ebf et v une variable d'objet, $(\forall v)A$ est une ebf.

(5) Rien n'est une ebf sinon par ce qui précède.

R e m a r q u e. Nous conservons les conventions énoncées en page 37, 1ère partie (cf. remarques). De plus, nous poserons $(\exists v)A =df \sim(\forall v)\sim A$.
Le signe $\forall$ est appelé le quantificateur universel et le signe $\exists$ le quantificateur existentiel ou particulier.

Q u e s t i o n s :

11. Dans la clause (4) de la définition inductive de l'ensemble des ebf, l'expression A contient-elle v?
12. L'expression suivante est-elle une ebf?

$$(\forall v_1)p_1^1 v_2 \supset \sim(\exists v_2)p_1^1 v_1$$

13. Ecrire quelques ebf.
14. Ecrire sans abréviation: $\sim(\exists v)p_1^1 v \wedge (\exists v)\sim p_2^1 v$

Il faut maintenant introduire deux notions.

DEFINITION 19 - -variables liées et variables libres- Soit les ebf $(\forall v)A$ et $(\exists v)A$. Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ sont dits au nom de la variable v. Chacun d'eux opère sur l'ebf A qui constitue le champ des quantificateurs. Toute variable située dans le champ d'un quantificateur à son nom est dite liée. Sinon elle est libre.

Exemples

liée

$$1)\quad (\forall v_1)\underbrace{(p_1^1 v_1 \supset (\exists \underset{\text{liée}}{v_2})\underbrace{p_1^3 v_1 \underset{\text{liée}}{v_2} \underset{\text{libre}}{v_3}}_{\text{champ de }\exists})}_{\text{champ de }\forall}$$

champ de $\exists$

liée

$$2)\quad (\forall \underset{\text{liée}}{v_1})\underbrace{(p_1^1 \underset{\text{liée}}{v_1} \supset (\exists v_1)\overbrace{p_1^1 v_1}^{\text{champ de }\exists})}_{\text{champ de }\forall} \supset \underset{\text{libre}}{v_1}$$

Q u e s t i o n s:

15. Quelles sont les variables libres dans :

$(\forall v_1)p_1^2 v_1 v_2 \supset (\exists v_2)p_1^2 v_1 v_2$

$(\forall v_1)(p_1^2 v_1 v_2 \supset (\exists v_2)p_1^2 v_1 v_2)$

16. Un terme peut-il contenir une variable? Si oui, peut-elle être liée dans ce terme? Et dans une ebf qui contient ce terme?
17. Une formule atomique peut-elle contenir une variable? Si oui, peut-elle être liée dans cette formule? Et dans une ebf qui contient cette formule?

Convention: Pour indiquer qu'une ebf A contient la variable v libre, nous écrirons $A(v)$.

DEFINITION 20 - -libre pour v- Soit un terme t et une ebf A(v) -elle contient donc une variable v libre. <u>On dit que le terme t est libre pour v dans A(v)</u> si, mis à la place des occurrences libres de v dans A, aucune des éventuelles variables de t ne se trouve liée. Dit autrement, le terme t est libre pour v dans A(v) si, dans A(v/t) [l'expression obtenue après avoir substitué le terme t à chaque occurrence libre de v dans A(v)] les variables libres qui peuvent figurer dans le terme t restent libres.

Exemple : $A(v_1)$: $(\forall v_2)p_1^2v_2v_1 \supset p_1^2v_2v_1$

- le terme v_3 est libre pour v_1 dans $A(v_1)$
- le terme $f_1^2v_4v_3$ est libre pour v_1 dans $A(v_1)$
- le terme $f_1^1v_2$ n'est pas libre pour v_1. En effet, sa variable v_2 se trouve liée dans

  $A(v_1/t)$: $(\forall v_2)p_1^2\underbrace{v_2f_1^1v_2}_{\text{liée}} \supset p_1^2v_2f_1^1v_2$

Q u e s t i o n s :

18. Soit le terme $f_1^2v_1c_1$. Trouver une ebf $A(v_4)$ telle que ce terme ne soit pas libre pour v_4 dans $A(v_4)$. Une fois $A(v_4)$ trouvée, chercher un terme f_1^2-- qui soit libre pour v_4 dans $A(v_4)$.
19. Un terme qui ne contient pas d'autres variables que v est-il libre pour v dans A(v)?
20. Un terme qui ne contient que des constantes est-il toujours libre pour v dans A(v)?

2.3 L'ensemble des axiomes: $\mathscr{P}$

Il s'agit d'un élargissement de l'ensemble des axiomes de L^0. Toute ebf de l'une des cinq formes suivantes est un axiome logique, et <u>rien n'est un axiome logique</u> sinon par l'une de ces formes:

(A1) $A \supset (B \supset A)$

(A2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

(A3) $(\sim B \supset \sim A) \supset ((\sim B \supset A) \supset B)$

(A4) $(\forall v)A(v) \supset A(v/t)$ si t est libre pour v dans A(v)

(A5) $(\forall v)(B \supset A(v)) \supset (B \supset (\forall v)A(v))$ si B ne contient pas v libre.

Q u e s t i o n s:

21. Donner un exemple d'axiome pour chacun des schémas A1-A5.
22. Les ebf suivantes sont-elles des axiomes?
    $(\forall v_1)(p_1^1 c_1 \supset p_1^2 v_1 c_1) \supset (p_1^1 c_1 \supset (\forall v_1) p_1^2 v_1 c_1)$
    $(\forall v_1)(\exists v_2) p_1^2 v_1 v_2 \supset (\exists v_2) p_1^2 v_2 v_2$
    $(\forall v_1)(\exists v_2) p_1^2 v_1 v_2 \supset (\exists v_2) p_1^2 v_1 v_2$

R e m a r q u e. Insistons encore sur la distinction entre systèmes du premier ordre purs (L) et les systèmes de premier ordre appliqués (S^α). Les premiers ne contiennent que des axiomes logiques. Ils formalisent l'appareil logique. Quant aux seconds, ils possèdent, en plus des axiomes logiques, des axiomes d'une autre nature. Il s'agit d'une catégorie d'axiomes qui mentionnent explicitement telles constantes, tels symboles de prédicat et tels symboles de foncteur. Ce sont les axiomes propres.

Par exemple, pour formaliser une structure d'ordre partiel, il faut offrir une base axiomatique qui, en plus des axiomes logiques, possède des axiomes propres, par exemple:
(A01) : $(\forall v) \sim p_1^2 vv$
(A02) : $(\forall v_i)(\forall v_j)(\forall v_k)((p_1^2 v_i v_j \wedge p_1^2 v_j v_k) \supset p_1^2 v_i v_k)$
Ces deux axiomes spécifient l'irréflexivité et la transitivité du prédicat p_1^2 choisi pour représenter une relation d'ordre partiel.

2.4 L'ensemble des règles: $\mathscr{R}$

Cet ensemble ne contient que deux éléments:
- la règle MP, le modus ponens (cf. p. 38, 1ère partie)
- la règle GEN, la généralisation. Elle s'énonce ainsi:

  Si A est une ebf, alors $(\forall v)A$ est une conséquence immédiate de A.

  GEN: $A \rightarrow (\forall v)A$

Q u e s t i o n s :
23. La règle du modus ponens s'applique-t-elle à $(\forall v_1)(p_1^0 \supset p_1^1 v_1)$ et p_1^0? Si non, peut-on transformer les expressions données de manière à ce que la règle MP s'y applique?
24. Mêmes questions pour $(\forall v_1) p_1^1 v_1 \supset p_1^0$ et $p_1^1 v_1$?
25. $(\forall v_1)(p_1^0 \supset (\exists v_1)\, p_1^2 v_1 v_1)$ est-elle une conséquence immédiate par GEN de l'ebf $p_1^0 \supset (\exists v_1)\, p_1^2 v_1 v_1$?

3. THEOREME ET CONCLUSIONS SYNTAXIQUES

Les théorèmes et conclusions syntaxiques d'un système S sont construits selon les démarches exposées au chapitre 2 [1ère partie, pp. 27-31]. Nous n'insisterons donc pas sur cet aspect, sinon pour souligner la distinction au niveau de l'appareil déductif entre le système L^0 et le système L qui formalise la logique pure des prédicats du premier ordre.

Appareil déductif

	L^0	L
Axiomes	(A1) (A2) (A3)	(A1) (A2) (A3) (A4) (A5)
Règles	MP	MP GEN

Q u e s t i o n s :

26. Etablir la preuve du théorème suivant: $\vdash (\forall v_1)p_1^1 v_1 \supset (\forall v_2)p_1^1 v_2$ [Utiliser notamment (A4) et (A5)].

27. A première vue, le résultat précédent peut paraître étrange. Que peut-on en conclure quant au 'statut' des variables liées?

28. Effectuer la déduction suivante:
$(\forall v_1)((\forall v_3)p_1^2 v_3 v_2 \supset p_1^1 v_1),\ p_1^2 v_1 v_2 \vdash (\forall v_1)p_1^1 v_1$ [Utiliser notamment (A4) et (A5)].

4. LE "THEOREME" DE LA DEDUCTION POUR S

Nous allons établir le "théorème de la déduction" pour un système quelconque du premier ordre. Il s'agit d'un métathéorème analogue au métathéorème 3. Mais le système L^0 est une réalisation 'élémentaire' des systèmes du premier ordre et le "théorème de la déduction" n'offre aucune difficulté. Pour un système qui formalise le calcul des prédicats, il est nécessaire de prendre quelques précautions par rapport au jeu des variables. Une difficulté intervient donc. Elle correspond à l'interdiction -en déduction naturelle- de réitérer dans certaines conditions une variable libre. Les deux définitions que nous proposons contribuent à formuler un "théorème" qui évite toute confusion.

DEFINITION 21 - -dépendre de- Soit une déduction $B_1, B_2, \ldots, B_n$ à partir d'une classe d'hypothèses qui contient en particulier A.
Une ebf B_i dépend de A si
(1) B_i est A ou
(2) B_i résulte par la règle MP ou GEN d'ebf dont l'une au moins dépend de A.

Exemples:

1. Soit la déduction de $(\forall v)B$ à partir de la classe d'hypothèses Γ:
$\Gamma = \{A, (\forall v)A \supset B\}$

1. A	$\in \Gamma$
2. $(\forall v)A$	1, GEN
3. $(\forall v)A \supset B$	$\in \Gamma$
4. B	3, 2, MP
5. $(\forall v)B$	4, GEN

Si l'on abrège l'expression "dépend de E" par dép(E), on a la situation suivante:

Expression de la ligne

1.	dép(A): c'est A
2.	dép(A): résulte par GEN de A qui dép(A)
3.	dép($(\forall v)A \supset B$): c'est $(\forall v)A \supset B$
4.	dép(A): résulte par MP d'une ebf qui dép(A) et dép($(\forall v)A \supset B$): résulte par MP d'une ebf qui dép($(\forall v)A \supset B$)
5.	dép(A) et dép($(\forall v)A \supset B$): résulte par GEN de B qui elle-même dép(A) et dép($(\forall v)A \supset B$).

2. Soit la déduction de $(\forall v_j)(\forall v_i)A(v_i, v_j)$ à partir de la classe d'hypothèses Γ: $\Gamma = \{(\forall v_j)A(v_i, v_j)\}$.

1. $(\forall v_j)A(v_i, v_j) \supset A(v_i, v_j)$	(A4)
2. $(\forall v_j)A(v_i, v_j)$	$\in \Gamma$; dép($(\forall v_j)A(v_i, v_j)$)
3. $A(v_i, v_j)$	1, 2, MP; " "
4. $(\forall v_i)A(v_i, v_j)$	3, GEN; " "
5. $(\forall v_j)(\forall v_i)A(v_i, v_j)$	4, GEN; " "

Q u e s t i o n s:

29. Un axiome dépend-il d'une quelconque hypothèse?
30. Considérer la déduction de la question 28 et déterminer les dépendances -si elles existent- pour les ebf de chacune des lignes.

DEFINITION 22 - -tenir constant- Dans une déduction, une variable est <u>tenue constante</u> relativement à une hypothèse A si:
1) elle ne figure pas libre dans A ou
2) si, libre dans A, elle n'est pas liée par GEN dans une ebf qui dépend de A.

Exemples:

1. Dans la déduction 2 qui précède, la variable v_j est tenue constante relativement à l'hypothèse $(\forall v_j)A(v_i, v_j)$: v_j n'y figure pas libre. La variable v_i, par contre, n'est pas tenue constante; en effet, elle est liée par GEN [ligne 4] dans l'ebf $A(v_i, v_j)$ qui dépend de l'hypothèse.
2. Soit la déduction de $(\forall v_1)p_1^1v_1$ à partir de la classe d'hypothèses Γ :
$\Gamma = \{\underbrace{(\forall v_1)((\forall v_3)p_1^2v_3v_2 \supset p_1^1v_1)}_{P1}, \underbrace{p_1^2v_1v_2}_{P2}\}$

1. $p_1^2v_1v_2$	$\in \Gamma$	
2. $(\forall v_1)p_1^2v_1v_2$	1, GEN	
3. $(\forall v_1)p_1^2v_1v_2 \supset p_1^2v_3v_2$	(A4), t: v_3	
4. $p_1^2v_3v_2$	3, 2, MP	
5. $(\forall v_3)p_1^2v_3v_2$	4, GEN	
6. $(\forall v_1)((\forall v_3)p_1^2v_3v_2 \supset p_1^1v_1) \supset ((\forall v_3)p_1^2v_3v_2 \supset (\forall v_1)p_1^1v_1)$		(A5)
7. $(\forall v_1)((\forall v_3)p_1^2v_3v_2 \supset p_1^1v_1)$	$\in \Gamma$	
8. $(\forall v_3)p_1^2v_3v_2 \supset (\forall v_1)p_1^1v_1$	6, 7, MP	
9. $(\forall v_1)p_1^1v_1$	8, 5, MP	

v_1 est tenue constante relativement à P1: elle y est liée.
v_2 est tenue constante relativement à P1: elle y est libre et le reste.
v_3 est tenue constante relativement à P1: elle y est liée.

v_1 n'est pas tenue constante relativement à P2: elle y est libre mais se fait lier par GEN relativement à l'ebf $p_1^2v_1v_2$ qui dépend de P2.
v_2 est tenue constante relativement à P2: elle y est libre et le reste.

Questions :

31. Y a-t-il sens à définir la propriété "d'être tenue constante relativement à une hypothèse" pour une constante?
32. La notion de "dépendance" ou celle "d'être tenue constante" s'applique-t-elle à autre chose qu'à des hypothèses?
33. Effectuer la déduction suivante et déterminer quelles variables sont tenues constantes:
    $A(v_i, v_j), (\forall v_k)A(v_i, v_j) \supset B(v_k) \vdash (\forall v_k)B(v_k)$

METATHEOREME 12 - "le théorème" de la déduction pour S

Dans S, si Γ, $A \vdash B$ et si les variables sont tenues constantes relativement à A alors $\Gamma \vdash A \supset B$.

Démonstration: Il s'agira d'une démonstration par induction sur le nombre k de lignes de la déduction supposée donnée: $\Gamma, A \vdash B$

Base de l'induction : k = 1

Dans une déduction ne comportant qu'une ligne aucune application des règles n'est possible. L'étude de ce cas est donc en tout point semblable à celle présentée pour la démonstration du métathéorème 3 [1ère partie, pp. 41-43].

Hypothèse d'induction :

Pour toute déduction $\Gamma, A \vdash B$ dont les variables sont tenues constantes relativement à A et qui compte au plus k lignes, on peut établir la déduction $\Gamma \vdash A \supset B$.

Pas d'induction :

Nous devons montrer que si la déduction $\Gamma, A \vdash B$ compte k+1 lignes et si les variables sont tenues constantes relativement à A, on peut établir une déduction $\Gamma \vdash A \supset B$. Considérons une déduction de k+1 lignes dont l'expression de la k+1 nième ligne est B. L'expression B peut se justifier de cinq manières différentes.

1. B est un axiome ou un théorème: $\vdash B$.
2. B appartient à Γ.
3. B est A.

4. B est une conséquence immédiate de deux ebf qui la précèdent par la règle MP.
5. B est une conséquence immédiate d'une ebf qui la précède par la règle GEN.

L'étude des quatre premiers cas est en tout point semblable à celle présentée pour la démonstration du métathéorème 3 [1ère partie, pp. 43-44]. Nous ne traiterons en conséquence que le cinquième cas: B est une conséquence immédiate d'une ebf qui la précède par la règle GEN.

Considérons donc la déduction $\Gamma, A \vdash B$ qui compte k+1 lignes.

1.		
2.		
⋮	⋮	
i	B_i	
⋮	⋮	
k+1	B	i, GEN

L'expression B de la ligne k+1 résulte par GEN d'une ebf B_i qui la précède. B est soit de la forme $(\forall v)C$ où C ne contient pas v libre, soit de la forme $(\forall v)C(v)$ où C contient v libre.

B_i est donc de la forme C ou C(v). Cette distinction n'intervient cependant pas dans la démonstration. Nous utilisons donc uniquement C(v).

L'ebf B_i s'inscrit à la ligne i; cet indice est strictement plus petit que k+1. L'ebf B_i entre donc dans le champ de l'hypothèse d'induction et on obtient: $\Gamma \vdash A \supset C(v)$ B_i est C(v) et hyp. d'induction.

Poursuivons cette déduction:

n	$A \supset C(v)$	hyp. d'induction [conclusion déduite à partir de l'ensemble des hypothèses Γ]
n+1	$(\forall v)(A \supset C(v))$	n, GEN
n+2	$(\forall v)(A \supset C(v)) \supset (A \supset (\forall v)C(v))$	(A5), si A ne contient pas v libre
n+3	$A \supset (\forall v)C(v)$	n+2, n+1, MP
n+4	$A \supset B$	n+3, $(\forall v)C(v)$ est B

Donc, si A ne contient pas v libre [c'est-à-dire, si v a été tenue constante relativement à A], on obtient $\Gamma \vdash A \supset B$.

Q u e s t i o n s :

34. Comment savoir si A ne contient réellement pas v libre?

35. On donne la déduction: $\Gamma, A_1, A_2 \vdash B$. Que permet d'écrire le méta-théorème 12 si A_1 et A_2 ne contiennent pas de variable? Et si A_1 contient v_1, A_2 contient v_2 et que seule v_2 est tenue constante?
36. Pour quelle raison n'avons-nous pas à nous soucier, dans l'étude des quatre premiers cas de la démonstration du pas d'induction, d'opérer avec des variables tenues constantes?

METATHEOREME 13 - Dans S, si $\Gamma \vdash A \supset B$, alors $\Gamma, A \vdash B$.

Démonstration: Sous les hypothèses de l'ensemble Γ, on a une déduction de $A \supset B$.
Ajoutons à cet ensemble d'hypothèses, l'hypothèse A. Sous cette condition, il est possible d'établir la déduction: $\Gamma, A \vdash B$.

1.	$A \supset B$	se déduit de Γ (hypothèse du Mth. 13)
2.	A	est l'hypothèse ajoutée
3.	B	1,2, MP

On obtient donc la conclusion B à partir de l'ensemble des hypothèses Γ et A : $\Gamma, A \vdash B$.

Q u e s t i o n :

37. Pourquoi n'a-t-on pas ici à prendre de précaution avec les variables?

5. LES REGLES DE LA DEDUCTION NATURELLE

Les règles de la déduction naturelle établies pour L^0 restent valables dans S. Il reste à vérifier que les règles pour le quantificateur universel sont disponibles dans S.

On avait:

1] Règle $\forall$e

$$\begin{array}{l|l} n & (\forall v)A(v) \\ & \text{------} \\ & A(v/t) \qquad \text{si } t \text{ libre pour } v \text{ dans } A(v) \end{array}$$

La régle $\forall$e n'est qu'une autre façon d'écrire le schéma d'axiome (A4) avec sa restriction d'emploi.

2] Règle $\forall$i

$$\begin{array}{r|l} n & v\,| \\ m & \quad\;|\,A(v) \\ & (\forall v)A(v) \end{array}$$

n-m, $\forall$i. A condition de ne pas réitérer une ebf qui contient v libre.

Dans la règle $\forall$i, le fait que la sous-déduction ne comporte pas d'hypothèse exprime que la règle GEN est de la forme:

si $A(v)$ alors $(\forall v)A(v)$ et non pas

si $B \vdash A(v)$ alors $B \vdash (\forall v)A(v)$.

Enfin, l'interdiction de réitérer une ebf qui contient v libre, garantit que v est tenue constante et autorise l'utilisation du Mth. 12.

Q u e s t i o n :

38. Considérer la déduction $(\forall v_2)A(v_1, v_2) \vdash (\forall v_2)(\forall v_1)A(v_1, v_2)$ dans laquelle v_1 n'est pas tenue constante et vérifier qu'il n'est pas possible de démontrer -en déduction naturelle- l'expression $(\forall v_2)A(v_1, v_2) \supset (\forall v_2)(\forall v_1)A(v_1, v_2)$.

6. LA SEMANTIQUE DES SYSTEMES FORMELS DU PREMIER ORDRE

Il s'agit maintenant d'offrir le moyen de 'revêtir' les systèmes formels du premier ordre d'une dimension sémantique. Reconnaître une signification aux ebf nécessite donc d'interpréter tous les symboles qui les composent. Dans le système L^0 l'interprétation des symboles était aisée. Il suffisait d'établir une application entre les symboles de prédicat de degré zéro et l'ensemble des valeurs V: $V = \{\top, \bot\}$. Mais ici, la situation est autre puisque nous disposons d'autres symboles, soit:

EC : ensemble des constantes

EV : ensemble des variables

EP^n : ensemble des symboles de prédicat de degré $\underline{n}$; $n \in \mathbb{N}$, $n>0$
[pour n = 0, nous avons déjà une interprétation].

EF^n : ensemble des symboles de foncteur de degré $\underline{n}$; $n \in \mathbb{N}$, $n>0$.

Nous allons donc nous donner non seulement $V = \{\top , \bot\}$, mais également un ensemble Ω non vide d'objets quelconques. Mais si cela est suffisant pour offrir une interprétation aux symboles de constante et de variable, c'est encore insuffisant pour attribuer une signification aux symboles de prédicat et de foncteur. Pour pallier cette difficulté nous allons procéder comme suit: à partir de l'ensemble Ω, nous définirons de manière extensionnelle d'une part les propriétés et les relations, et d'autre part, les foncteurs.

Définition 'en extension' d'une relation: un rappel

Définir une propriété, une relation binaire, une relation n-aire, c'est donner les éléments, les couples d'éléments, les n-uples qui possèdent la propriété ou ont entre eux la relation [cf. 1ère partie, pp. 83-84]. Attribuer une signification à un symbole de prédicat de degré $\underline{d}$, $p_i^{d>0}$, c'est donc lui faire correspondre un ensemble de d-uple.

Exemple:

Soit $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots, n, \ldots\}$

Attribution d'une signification à p_i^d où $d = 3$

1) En extension:

$$p_i^3 \longmapsto R = \{\langle 0,1,9\rangle, \langle 0,2,9\rangle, \langle 0,3,9\rangle, \langle 0,4,9\rangle, \langle 0,5,9\rangle, \langle 0,6,9\rangle, \langle 0,7,9\rangle, \langle 0,8,9\rangle\}$$

Cet ensemble R est contenu dans l'ensemble produit Ω^3; c'est donc une partie [un sous-ensemble] de Ω^3 :

$$R \in \mathcal{P}(\Omega^3)$$

2) En compréhension:

p_i^3 : "être entre 0 et 9"

Définition 'en extension' d'un opérateur: un rappel

Définir un opérateur à n-opérandes, c'est donner les couples d'arguments dont le premier consiste en un n-uple représentant les $\underline{n}$ opérandes, et dont le second argument représente le résultat de l'opération [cf. 1ère partie, pp. 84-85]. Attribuer une signification à un symbole de foncteur f_i^d de degré $\underline{d}$, c'est donc lui faire correspondre un ensemble de cette nature.

$$f_i^d = \{\ldots, \langle \underbrace{\langle -, -, \ldots, - \rangle}_{\text{n-uple de } \underline{n} \text{ opérandes}} \overset{\text{résultat}}{\overset{\downarrow}{-}} \rangle, \ldots\}$$

Exemple:

Soit Ω: $\{0,1,2,3\}$

Attribution d'une signification à f_i^d où d = 2.

1) En extension:

$$\begin{aligned} f_i^2 \longmapsto T = \{ & <<0,0>, 0>, <<0,1>, 1>, <<0,2>, 2>, <<0,3>, 3>, \\ & <<1,0>, 1>, <<1,1>, 2>, <<1,2>, 3>, <<1,3>, 0>, \\ & <<2,0>, 2>, <<2,1>, 3>, <<2,2>, 0>, <<2,3>, 1>, \\ & <<3,0>, 3>, <<3,1>, 0>, <<3,2>, 1>, <<3,3>, 2> \} \end{aligned}$$

Cet ensemble T est contenu dans l'ensemble produit $\Omega^2 \times \Omega$, c'est donc une partie de $\Omega^2 \times \Omega$: $T \in \wp(\Omega^2 \times \Omega)$.

2) En compréhension:

f_i^2 : addition 'reste modulo 4'.

Conventions : Posons les notations suivantes:

EC : ensemble des constantes de S.
EV : ensemble des variables de S.
EP^0 : ensemble des symboles de prédicat de degré zéro de S.
$EP^{d>0}$: ensemble des symboles de prédicat de degré <u>d</u> de S, d>0 .
$EF^{d>0}$: ensemble des symboles de foncteur de degré <u>d</u> de S, d>0 .

DEFINITION 23 -interprétation- - Une <u>interprétation</u> de S est la donnée

1) de l'ensemble V = $\{\top, \bot\}$- <u>le domaine de valeurs</u>;
2) d'un ensemble non vide Ω d'objets - <u>le domaine d'objets</u>;
3) d'une application Ψ de chacune des espèces suivantes:

3.1 Ψ_C : EC $\longrightarrow \Omega$

3.2 Ψ_V : EV $\longrightarrow \Omega$

3.3 Ψ_{P^0} : $EP^0 \longrightarrow V$

3.4 $\Psi_{P^{d>0}}$: $EP^d \longrightarrow \wp(\Omega^d)$ -<u>organisation relationnelle</u>

3.5 $\Psi_{F^{d>0}}$: $EF^d \longrightarrow \wp(\Omega^d \times \Omega)$ -<u>organisation fonctionnelle</u>.

Q u e s t i o n s :

39. Que peut-on dire des éléments de Ω ?
40. En quoi l'interprétation d'une variable diffère-t-elle de celle d'une constante?
41. De quelle<u>s</u> façon<u>s</u> une interprétation I1 peut-elle être différente d'une interprétation I2?

Après l'attribution d'une signification aux différents symboles du vocabulaire, il s'agit d'offrir également une valeur sémantique aux termes ainsi qu'aux ebf.

Un terme [cf. pp. 3-4] étant une construction bien formée sur la base de foncteurs, de constantes et de variables, c'est en considérant l'application relative à ces éléments-là que nous fournirons une application attribuant une valeur sémantique à chaque terme.

Soit ET, l'ensemble des termes. On définit l'application

$$\Psi_T : ET \longrightarrow \Omega$$

par les trois conditions suivantes:

1) $\Psi_T(c_i) = \Psi_C(c_i)$

2) $\Psi_T(v_i) = \Psi_V(v_i)$

3) $\Psi_T(f_i^d t_1 t_2 \ldots t_d)$ = l'élément de Ω qui dans l'image $\Psi_{F^d}(f_i^d)[\in \mathfrak{P}(\Omega^d \times \Omega)]$ est en relation directe avec le d-uple : $<\Psi_T(t_1), \Psi_T(t_2), \ldots, \Psi_T(t_d)>$ $[\in \Omega^d]$

Cette formulation apparemment confuse mérite d'être exemplifiée.

Exemple

Soit $\Omega = \mathbb{N}$, le terme $f_1^2 c_1 v_2$ et l'interprétation I:

$\Psi_C(c_1) = 1$

$\Psi_V(v_2) = 2$

$$\Psi_{F^d}(f_1^2) = \{<<0,0>, 0>, <<0,1>, 1>, <<0,2>, 2>, \ldots,$$
$$<<1,0>, 1>, <<1,1>, 2>, <<1,2>, 3>, \ldots,$$
$$<<2,0>, 2>, <<2,1>, 3>, <<2,2>, 4>, \ldots\}$$

En compréhension : "addition dans $\mathbb{N}$".
Recherche de la valeur de $f_1^2 c_1 v_2$

1. Constitution du couple $<\Psi_T(c_1), \Psi_T(v_2)>$

$\Psi_T(c_1) = \Psi_C(c_1) = 1$

$\Psi_T(v_2) = \Psi_V(v_2) = 2$

On obtient le couple $<1, 2>$

2. Reconnaissance du couple <1,2> dans un des éléments de l'image de f_1^2 :

$$<<1,2>, 3>$$

3. Attribution au terme $f_1^2 c_1 v_2$ de la valeur de Ω qui est en relation directe avec le couple <1,2>: 3.

$$\Psi_T(f_1^2 c_1 v_2) = 3$$

Q u e s t i o n s :

42. Soit le terme $f_2^2 v_3 f_1^2 v_1 c_2$, l'ensemble $\Omega = \mathbb{N}$ et l'interprétation I:
$\Psi_C(c_2) = 2$; $\Psi_V(v_3) = 7$; $\Psi_V(v_1) = 3$

$\Psi F^d(f_1^2)$ = comme ci-dessus

$$\Psi_F d(f_2^2) = \{<<0,0>, 0>, <<0,1>, 0>, <<0,2>, 0>, \ldots, \\ <<1,0>, 0>, <<1,1>, 1>, <<1,2>, 2>, \ldots, \\ \vdots \\ <<7,1>, 7>, <<7,2>, 14>, \ldots, <<7,5>, 35>, \ldots\}$$

En compréhension : "le produit dans $\mathbb{N}$"
Déterminer l'image de $f_2^2 v_3 f_1^2 v_1 c_2$.

43. Soit $\Omega = \{1,2,3\}$ et la formule atomique $p_1^2 c_1 v_3$. On a choisi une interprétation I dans laquelle

$\Psi_C(c_1) = 2$; $\Psi_V(v_3) = 1$; $\Psi_P d(p_1^2) = \{<1,2>, <1,3>, <2,3>\}$

Comment interpréter en compréhension l'image de p_1^2 ?
Pourquoi a-t-on $<1,2> \in \Psi_P d(p_1^2)$?

A-t-on $<\Psi_C(c_1), \Psi_V(v_3)> \in \Psi_P d(p_1^2)$?

DEFINITION 24 -évaluation- - Soit A une ebf de S et une interprétation I. On appelle <u>évaluation de A pour l'intepprétation I</u> la valeur de l'application val : A $\longrightarrow$ V telle que:

1. $val(p_i^0) = \top$ ssi $\Psi_{P0}(p_i^0) = \top$ dans I.
2. $val(p_i^d t_1 t_2 \ldots t_d) = \top$ ssi $<\Psi_T(t_1), \Psi_T(t_2), \ldots, \Psi_T(t_d)> \in \Psi_P d(p_i^d)$ dans I.
3. $val(\sim A) = \top$ ssi val(A) est différente de $\top$ dans I.
4. $val(A \supset B) = \top$ ssi val(A) est différente de $\top$ dans I ou $val(B) = \top$ dans I.

5. $val((\forall v_i)A) = \top$ ssi $val(A) = \top$ dans I, quelle que soit l'image de la variable v_i.

6. $val(A) = \bot$ ssi $val(A)$ est différente de $\top$ dans I.

Q u e s t i o n s :

44. Dans la définition 23 [cf. p. 16], nous attribuions par l'application Ψ_V un élément de Ω à chaque élément de l'ensemble des variables EV. Cette application ne différait en aucune manière de l'application Ψ_C, laissant ainsi entendre que le statut de variable et de constante n'est, en fait, pas distinct. Dans la clause 5 de la définition 24, il est spécifié: "quelle que soit l'image de la variable v_i". A l'aide de cette spécification quelle est l'idée qui est réintroduite relativement aux éléments de EV?

45. Soit l'ensemble Ω: $\Omega = \{1, 2, 3\}$, et l'interprétation I ainsi donnée:

$\Psi_C(c_1) = 2$; $\Psi_C(c_2) = 1$; $\Psi_V(v_1) = 1$

$\Psi_{P}d(p_1^2) = \{<1,2>, <1,3>, <2,3>\}$

$\Psi_{P}d(p_2^2) = \{<1,1>, <2,2>, <3,3>\}$.

Pour cette interprétation, quelle est l'évaluation de :

1) $p_1^2 c_1 v_1$ 2) $p_1^2 v_1 c_1$ 3) $p_2^2 c_1 v_1$ 4) $p_2^2 v_1 v_1$

5) $(\forall v_1) p_2^2 v_1 v_1$ 6) $(\forall v_1) p_2^2 v_1 c_2$?

DEFINITION 25 - -logiquement valide sur Ω- Une ebf A de S est logiquement valide sur un domaine particulier Ω ssi $val(A) = \top$ pour toute interprétation sur Ω

DEFINITION 26 - -logiquement valide- Une ebf A de S est logiquement valide ssi elle est logiquement valide sur tout domaine Ω.

R e m a r q u e On voit que la validité logique [déf. 26] est plus forte que la validité logique sur Ω [déf. 25].

Q u e s t i o n s :

46. Peut-il arriver qu'une ebf soit logiquement valide sur un certain domaine et pas sur un autre?

47. Est-il possible qu'une ebf soit logiquement valide sans être logiquement valide sur un certain domaine Ω?

Exemple

Soit l'ebf A =df $\sim(\forall v)\sim p^1v \supset (\forall v)p^1v$ et le domaine Ω à un seul élément: $\Omega = \{1\}$.

Il n'existe qu'une seule manière d'interpréter la variable v: $\Psi(v) = 1$. Mais il existe deux possibilités pour interpréter le prédicat de degré 1. En effet, attribuer une signification à p^1, c'est lui faire correspondre un élément R appartenant à l'ensemble des parties de Ω:

$$R \in \mathcal{P}(\Omega)$$

Si l'ensemble $\Omega = \{1\}$, alors $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset , \{1\}\}$, ou autrement écrit: $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset,\Omega\}$. Il y a donc deux interprétations possibles pour p^1:

$$\Psi_{pd}(p^1) \begin{cases} \emptyset & : \text{Interprétation I'} \\ \Omega & : \text{Interprétation I''} \end{cases}$$

Comme nous voulons examiner la validité de A sur Ω , il suffit dès lors d'étudier les deux interprétations possibles :

	I'	I"	EXPLICATIONS I'	EXPLICATIONS I"
$\Psi_V(v)$	1	1		
$\Psi_{pd}(p^1)$	$\emptyset$	Ω		
1. $val(p^1v)$	$\perp$	$\top$	. $\perp$ car $1 \notin \emptyset$	. $\top$ car $1 \in \Omega$
2. $val((\forall v)p^1v)$	$\perp$	$\top$	. Quelle que soit la valeur de v il n'y a qu'une seule possibilité pour $\Psi_V(v)$	
3. $val(\sim p^1v)$	$\top$	$\perp$	. $\top$ car 1.+ déf. 24	. $\perp$ car 1.+ déf. 24
4. $val((\forall v)\sim p^1v)$	$\top$	$\perp$	. cf. explication ligne 2	
5. $val(\sim(\forall v)\sim p^1v)$	$\perp$	$\top$	. $\perp$ car 4. + déf. 24	. $\top$ car 4. +déf. 24
6. $val(A)$	$\top$	$\top$	. $\top$ car 5., 2. +déf. 24	. $\top$ car 5.,2. +déf. 24

L'ebf A est donc logiquement valide sur Ω.

Q u e s t i o n s :

48. Considérer l'expression A de l'exemple précédent et le domaine Ω : $\Omega = \{1, 2\}$.
    - Combien y a-t-il d'interprétations différentes pour v?
    - Former l'ensemble des parties de Ω :$\mathcal{P}(\Omega)$ puis établir toutes les interprétations possibles pour p^1.
    - L'ebf A est-elle valide sur Ω?

- Considérer une ebf possédant un prédicat de degré 2; par exemple: $B = \sim(\forall v)p^2vv$.

  Décrire la démarche à effectuer pour déterminer si l'ebf B est logiquement valide sur Ω.

49. Une tautologie sous-tend l'idée d'une analyse finie de la combinatoire des valeurs de vérité. L'exemple ci-dessus met en évidence qu'une telle combinatoire finie est effectivement réalisée. Il est tentant d'assimiler le terme de "tautologie" à celui de "logiquement valide". Mais cette combinatoire finie est-elle toujours réalisée?

7. QUELQUES METATHEOREMES

Il est nécessaire de s'assurer que dans L. tout théorème est logiquement valide. Pour le démontrer, nous procéderons en deux étapes: nous établirons tout d'abord que les règles GEN et MP conservent la propriété "d'être logiquement valide", puis nous montrerons que tout axiome est logiquement valide.

7.1 Où il est question des règles d'inférence

La règle du modus ponens conserve la validité logique:
Si A et $A \supset B$ sont logiquement valides, alors B est logiquement valide.

Ce résultat a été démontré dans le cadre de l'étude du système L°[1ère partie, pp. 58-9]. Occupons-nous donc de la règle GEN. Proposons tout d'abord une définition.

DEFINITION 27 - -fermeture- Soit $A(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ une ebf dont les seules variables libres sont $v_1, v_2, \ldots, v_k$. La fermeture de cette ebf est: $(\forall v_k)\ldots(\forall v_2)(\forall v_1)A(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. Il s'agit d'une ebf dans laquelle toutes les variables sont liées. On la dira fermée.

Q u e s t i o n s :

50. L'ordre dans lequel les quantificateurs sont introduits afin de fermer une ebf a-t-il de l'importance?
51. Quelle est la fermeture de $p_1^1v_1 \supset (\exists v_3)p_1^2v_3v_2$?
52. L'ebf $A(v_1, v_4, v_3)$ a-t-elle une fermeture?
53. De quelle manière peut-on modifier l'énoncé du métathéorème 12 [p. 11] si l'ebf A est fermée?

METATHEOREME 14 - Une ebf et sa fermeture sont logiquement valides ensemble.

Démonstration: il est nécessaire d'établir que:

1) Si A est valide, alors $(\forall v)A$ l'est aussi:
   Si $\models A$ alors $\models (\forall v)A$, (v désigne une variable quelconque); et
2) Si $(\forall v)A$ est valide, alors A l'est aussi:
   Si $\models (\forall v)A$ alors $\models A$, (v désigne une variable quelconque).

Raisonnons ainsi:

1) Admettons par hypothèse que A est logiquement valide: $\models A$. Quelle que soit l'interprétation I, on a donc $val(A) = \top$. L'application Ψ_v peut donc attribuer n'importe quelle image à la variable v, l'expression A conserve la valeur $\top$. Dit autrement, $val(A) = \top$ quelle que soit l'image de la variable v et quelle que soit l'interprétation I. La définition 24, clause 5, permet de conclure que $(\forall v)A$ est également valide: $\models (\forall v)A$.
2) Admettons par hypothèse que $(\forall v)A$ est logiquement valide: $\models (\forall v)A$. Dans ce cas, le raisonnement est de la même nature que le précédent; nous ne le formulerons donc pas.

Remarque: Le métathéorème 14 montre davantage que simplement la conservation de la propriété "d'être logiquement valide" à travers la règle GEN. Il établit également que la règle d'élimination du quantificateur universel conserve aussi cette propriété.

7.2 Où il est question des axiomes

Les trois premiers schémas d'axiome de L possèdent la même forme que ceux de L^0. Dans ce dernier système, nous avions montré que les axiomes étaient logiquement valides en exposant un raisonnement qui se fondait sur l'unique présence de la valeur $\top$ dans une table de vérité -une tautologie. Il n'est pas possible de procéder de la même manière dans un système qui autorise une substitution à partir d'un ensemble d'ebf qui possède notamment des formes quantifiées. Nous effectuerons un détour en raisonnant ainsi:

> Quel que soit le schéma d'axiome A1-A3 considéré, nous obtenons un axiome en substituant aux métavariables, des ebf de L. L'évaluation de chaque ebf -avec ou sans variables, avec ou sans quantificateurs- conduit soit à la valeur $\top$, soit à la valeur $\perp$. Il est donc possible