TRAVAUX DU CENTRE DE RECHERCHES SÉMIOLOGIQUES

Philosophie et sciences chez Henri Poincaré: Lecture philosophique

par Anne-Françoise Schmid, Lausanne

N° 22 — Octobre 1974

UNIVERSITÉ DE NEUCHATEL
Centre de recherches sémiologiques
Avenue du Premier-Mars 26
2000 Neuchâtel (Suisse)

PHILOSOPHIE ET SCIENCES CHEZ HENRI POINCARE : LECTURE PHILOSOPHIQUE

par Anne-Françoise SCHMID, Lausanne.

Table des matières

	page
Introduction	1
Chapitre 1 - Les mathématiques	4
A. Mathématiques et expérience	4
B. Mathématiques et logique	13
C. Mathématiques et langage	26
Chapitre 2 - La géométrie	37
Chapitre 3 - La mécanique et la physique	51
A. Mécanique et géométrie	53
B. Mécanique et physique	60
C. La physique	68
Chapitre 4 - La philosophie	81
Chapitre 5 - Remarques sur le texte	89
Sigles	90
Bibliographie	I-VI

No 22 - octobre 1974

Aussi lecture philosophique et analyse rhétorique ne sont-elles pas des buts en soi: elles sont des préalables pour une étude ultérieure, cette fois historique, sur l'attitude de Poincaré à l'égard des développements de la logique mathématique et de ses conséquences à la fois philosophiques et scientifiques. Nous espérons que cet ensemble de travaux nous permettra de prendre position dans la conjoncture épistémologique française actuelle.

Chapitre 1 LES MATHEMATIQUES

Poincaré a écrit entre 1893 et 1912 (année de sa mort) une quinzaine d'articles et de conférences sur les mathématiques. Dans ces textes, il ne définit guère les mathématiques pour elles-mêmes; disons plutôt qu'il en donne des spécifications au moyen de mises en relations avec diverses instances et disciplines dont il nous faut analyser la nature et le rôle.

Nous avons pris le parti dans ce chapitre d'analyser ces spécifications dans leur ordre chronologique d'apparition dans les textes. Une étude exhaustive des articles nous contraindrait en effet à d'interminables redites, car Poincaré reprend souvent les mêmes problèmes en en modifiant l'exposé selon les circonstances et l'auditoire auquel il s'adresse.

A. Mathématiques et expérience

"La grandeur mathématique et l'expérience". RMM (1893) 26-34; modifié dans SH 29-44.

Qu'est-ce que le continu mathématique? telle est la question posée au début de cet article. En un premier temps Poincaré y répond par un exposé de la théorie des coupures de Dedekind qui permet de définir certains symboles, les nombres incommensurables, comme mode de répartition des nombres commensurables. Mais cette construction théorique, correcte du point de vue mathématique, ne suffit pas à Poincaré:

Note: Dans ce chapitre, nous parlons des mathématiques à l'exclusion de la géométrie qui sera traitée plus loin, pour des raisons qui tiennent aux conceptions de Poincaré

> Mais se contenter de cela, ce serait trop oublier l'origine de ces symboles; il reste à expliquer comment on a été conduit à leur attribuer une sorte d'existence concrète...
> On en vient alors à se demander si la notion de continu mathématique n'est pas tout simplement tirée de l'expérience. Si cela était, les données brutes de l'expérience, qui sont nos sensations, seraient susceptibles de mesure. (SH 34)

Ce texte nous apprend que l'expérience est définie par son rapport aux sensations; qu'elle n'intervient pas à l'intérieur de la théorie mathématique exposée; que son rapport avec les mathématiques se pose sous le couvert d'une autre question; celle de l'origine des notions. Cet article n'est donc pas une simple vulgarisation de la théorie des coupures: le propos de Poincaré est de définir une relation entre cette théorie et l'expérience; quelle est la nature de ce lien? Voici ce qu'en dit Poincaré:

> En résumé, l'esprit a la faculté de créer des symboles, et c'est ainsi qu'il a construit le continu mathématique, qui n'est qu'un système particulier de symboles. Sa puissance n'est limitée que par la nécessité d'éviter toute contradiction; mais l'esprit n'en use que si l'expérience lui en fournit une raison.
> Dans le cas qui nous occupe, cette raison était la notion du continu physique, tirée des données brutes des sens. (SH 40)

Ces lignes répondent à notre question, curieusement: en la déplaçant; au rapport théorie mathématique - expérience est substitué celui de l'esprit comme faculté de créer des symboles à l'expérience; cette substitution est très révélatrice: nous voyons que le lien entre la théorie du continu mathématique et l'expérience n'est pas spécifique à cette théorie; nous sommes bien à l'extérieur de cette théorie, mais non à son extérieur; la question posée au début d'article est un prétexte pour introduire une thèse de portée beaucoup plus générale, vis-à-vis de laquelle la théorie exposée n'est qu'un "système particulier de symboles", n'est que "le cas qui nous occupe"; en d'autres termes, la construction du continu fonctionne comme exemple illustrant

et justifiant une affirmation où entrent en jeu deux instances étrangères à l'exposé de la théorie, l'esprit et l'expérience. Bref, au début de l'article, nous pouvions croire avoir affaire à un discours de mathématiques, puis à un discours se jouant à ses bords; enfin nous voyons qu'il ne porte pas directement sur les mathématiques, qu'il ne les définit pas, mais bien plutôt qu'il les situe entre deux instances extérieures.

Extériorité: cette image spatiale ne désigne pas une simple configuration; ce que nous avons appelé ici extériorité - pour rendre compte à la fois du déroulement du texte et de la non spécification de ces notions par rapport à la théorie mathématique exposée - est en réalité l'effet d'une différence beaucoup plus fondamentale: celle de leur fonctionnement. En effet, contrairement aux concepts mathématiques construits à l'intérieur d'une théorie démonstrative, le sens des notions d'expérience et d'esprit ne leur vient pas d'une définition ou d'une démonstration, mais d'une référence à deux réalités données, respectivement les sensations et les facultés intellectuelles créatrices de symboles, réalités non articulées à telle théorie considérée, mais qui à l'égard des théories mathématiques en général, jouent un triple rôle de localisation, de constitution et de justification. C'est pourquoi nous avons appelé ces deux notions "instances". Notre thèse, que nous spécifierons au cours de notre exposé, est que ce fonctionnement est de type proprement philosophique.

Dans le premier texte que nous avons cité (SH 34), la notion d'expérience est introduite à propos du problème de l'origine des symboles mathématiques. Nous pouvons voir maintenant que ce problème, qui a préoccupé Poincaré jusqu'à la fin de sa vie, n'est autre que celui du lien entre les mathématiques et l'expérience ou l'esprit: cette question va donc se jouer entièrement dans l'espace philosophique que nous venons de définir; elle ne peut avoir de solu-

tion que dans le champ déjà délimité par les deux instances; si l'expérience n'est pas à l'origine des symboles mathématiques, ce sera l'esprit; une troisième solution est possible, mais elle ne peut être qu'un intermédiaire entre les deux premières.

Quels sont les arguments qui décideront de la solution? Chose curieuse à première vue, mais qui confirme notre interprétation, les mathématiques ne sont pas décisives dans le choix de la solution; le problème posé en des termes philosophiques, est résolu par le jeu réciproque de ces mêmes termes.

Voici l'argumentation de Poincaré: les résultats immédiats de l'expérience contredisent souvent le principe selon deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles; par conséquent, les mathématiques ne peuvent être une simple représentation de nos sensations; d'autre part, une nécessité de nature psychologique nous contraint à résoudre cette contradiction existant entre les données de l'expérience et les principes logiques de notre esprit:

> Les résultats bruts de l'expérience peuvent donc s'exprimer par les relations suivantes:
>
> $$A=B,\ B=C,\ A<C,$$ [1)]
>
> qui peuvent être regardées comme la formule du continu physique.
> Il y a là, avec le principe de contradiction, un désaccord intolérable, et c'est la nécessité de le faire cesser qui nous a contraints à inventer le continu mathématique.
> On est donc forcé de conclure que cette notion a été créée de toutes pièces par l'esprit, mais que c'est l'expérience qui lui en a fourni l'occasion.
> Nous ne pouvons croire que ces deux quantités égales à une même troisièmene soient pas égales entre elles, et c'est ainsi que nous sommes amenés à supposer que A est différent de B et B de C, mais que l'imperfection de nos sens ne nous avait pas permis de discerner. (SH 35).

---

1) Des sensations contiguës sont indiscernables. Poincaré en donne presque toujours le même exemple: nous ne pouvons pas discerner, sans balance, un poids de 10 g d'un poids de 11 g; ni un poids de 11 g d'un poids de 12 g alors que le poids de 11 g nous semble plus léger que celui de 12 g.

Une telle solution assigne une tâche aux mathématiques à l'intérieur de cet espace philosophique: celle de lever les contradictions de l'expérience par un "artifice", la création de nouveaux symboles, qui permettent de "concilier l'intuition avec l'analyse" (SH 44). Cette tâche localise plus précisément les mathématiques dans notre configuration; leur source, c'est l'esprit. Mais aussi elle les justifie: les mathématiques ne sont pas arbitraires, elles ont quelque chose à voir avec la réalité, quoiqu'elles en soient systématiquement distinguées puisque elles ne sont pas une science expérimentale (cf. VS 34).

Nous avons vu maintenant comment Poincaré situe les mathématiques dans l'espace clos que nous avons discerné. Cette localisation a-t-elle des effets sur les théories mathématiques? C'est là une question épistémologique par excellence.

De nouveau, les caractéristiques internes aux mathématiques n'ont pas de pertinence pour l'examen de cette question: les arguments décisifs sont d'ordre psychologique.

Tout d'abord, une telle localisation permet de poser certaines exigences pour l'exposé d'une théorie; nous pouvons ainsi distinguer les traits qui définissent une "bonne" théorie: elle doit paraître naturelle et justifiée; elle doit donc garder quelques traces de son origine et de son histoire, c'est-à-dire de ses démarcations progressives par rapport à l'expérience commune; c'est là un thème invariable chez Poincaré; cette préoccupation n'apparaît pas seulement dans des écrits adressés à des psychologues ou à des pédagogues.

1899 (Oeuvres, tome 11, p. 132):

> Or, pour comprendre une théorie, il ne suffit pas de constater que le chemin que l'on a suivi n'est pas coupé par un obstacle, il faut se rendre compte des raisons qui l'ont fait choisir. Pourra-t-on donc jamais dire qu'on comprend une théorie si on veut lui donner d'emblée sa forme définitive, celle que la logique im-

peccable lui impose, sans qu'il reste aucune trace des tâtonnements qui y ont conduit? Non, on ne la comprendra pas réellement, on ne pourra même la retenir, ou on ne la retiendra qu'à force de l'apprendre par coeur.

1900 (VS 36-37):

Voyons ce qui est arrivé, par exemple, pour l'idée de fonction continue. Au début, ce n'était qu'une image sensible, par exemple, celle d'un trait continu tracé à la craie sur un tableau noir. Puis elle s'est épurée peu à peu, bientôt on s'en est servi pour construire un système compliqué d'inégalités, qui reproduisait pour ainsi dire toutes les lignes de l'image primitive: quand cette construction a été terminée, on a décintré, pour ainsi dire, on a rejeté cette représentation grossière qui lui avait momentanément servi d'appui et qui était désormais inutile; il n'est plus resté que la construction elle-même, irréprochable aux yeux du logicien. Et cependant si l'image primitive avait totalement disparu de notre aouvenir, comment devinerions-nous par quel caprice toutes ces inégalités se sont échafaudées de cette façon les unes sur les autres?

Et plus loin:

...les anciennes notions intuitives de nos pères, même lorsque nous les avons abandonnées, impriment encore leur forme aux échafaudages logiques que nous avons mis à leur place.

Voici encore un texte de 1912 où nous voyons ces exigences philosophiques intervenir concrètement dans le choix entre deux définitions mathématiques de la dimension:(DP 137-138)

Pour nous qui tirons la notion du continu à n dimensions, non de la définition analytique précitée, mais de je ne sais quelle source plus profonde, cette opération <changement de coordonnées> est toute naturelle; nous sentons qu'elle n'altère pas ce qu'il y a d'essentiel dans le continu. Pour ceux, au contraire, qui ne connaîtraient le continu que par la définition analytique, l'opération serait licite sans doute, mais baroque et mal justifiée.
Enfin cette définition fait bon marché de l'orgine intuitive de la notion de continu, et de toutes les richesses que recèle cette notion. Elle rentre dans le type de ces définitions qui sont devenues si fréquentes dans la mathématique, depuis qu'on tend à "arithmétiser" cette science. Ces définitions, irréprochables ...au point de vue mathématique, ne sauraient satisfaire le philosophe. Elles remplacent l'objet à définir et la notion intuitive de cet objet par une construction faite avec des matériaux plus simples; on voit*alors qu'on peut effectivement faire cette construction avec ces matériaux, mais

*bien

> on voit en même temps qu'on pourrait en faire tout aussi bien beaucoup d'autres; ce qu'elle ne laisse pas voir, c'est la raison profonde pour laquelle on a assemblé ces matériaux de cette façon et non pas d'une autre.

Notons que la définition inductive donnée plus loin par Poincaré se fonde sur des notions mathématiques. C'est donc bien la philosophie qui opère ici le choix entre deux définitions mathématiques.

Ensuite et surtout, cette localisation a aussi des effets dans la délimitation de ce qui est mathématique et de ce qui ne l'est pas; ici il ne s'agit plus d'une exigence philosophique portant sur l'exposé de la théorie, mais d'une intervention philosophique dans le scientifique. Poincaré désigne tout à fait explicitement cette intervention en 1912 dans sa polémique contre les partisans du formalisme logique. Nous consacrerons à cette polémique une étude particulière; nous ne l'analysons donc pas ici en détails; disons seulement que la raison de cette intervention se trouve de nouveau être de nature essentiellement psychologique: il y a chez les mathématiciens des tendances mentales opposées qui conçoivent les objets mathématiques d'un point de vue philosophique différent; d'après Poincaré, cela explique le fait que des définitions et des démonstrations y soient admises comme scientifiques par les uns et non par les autres:

> ...il me semble que nous en apercevons la véritable cause; les savants des deux écoles ont des tendances mentales opposées; ceux que j'ai appelé les Pragmatistes sont des idéalistes, les Cantoriens sont des réalistes. (DP 93)

Et plus loin (p. 95)

> De tout temps, il y a eu en philosophie des tendances opposées et il ne semble pas que ces tendances soient sur le point de se concilier. C'est sans doute parce qu'il y a des âmes différentes et qu'à ces âmes nous ne pouvons rien changer. Il n'y a donc aucun espoir de voir l'accord s'établir entre les Pragmatistes et les Cantoriens.

L'espace philosophique défini n'est donc pas neutre par rapport aux mathématiques.

Nous ne sommes pas encore au bout des conséquences qu'implique une telle localisation des mathématiques, en effet, la notion d'expérience, telle que la définit Poincaré, sépare radicalement théorie et pratique, la théorie se référant aux facultés de l'esprit et la pratique à la réalité donnée par nos sensations.

1904 (SM 131)

> Mais croit-on que les mathématiques aient atteint la rigueur absolue sans faire de sacrifice? Pas du tout, ce qu'elles ont gagné en rigueur, elles l'ont perdu en objectivité. C'est en s'éloignant de la réalité qu'elles ont acquis cette pureté parfaite. On peut parcourir librement tout leur domaine, autrefois hérissé d'obstacles, mais ces obstacles n'ont pas disparu. Ils ont seulement été transportés à la frontière, et il faudra les vaincre de nouveau si l'on veut franchir cette frontière pour pénétrer dans le royaume de la pratique.

Ainsi les mathématiques ne sont pas définies par Poincaré dans leur autonomie théorique: elles participent, d'une part, à la théorie pure, et, d'autre part, elles doivent pouvoir "s'appliquer" à la réalité; mais ce n'est pas la théorie mathématique qui détermine ces rapports.

1897 (VS 104)

> Les mathématiques ont un triple but. Elles doivent fournir un instrument pour l'étude de la nature.
> Mais ce n'est pas tout: elles ont un but philosophique et, j'ose dire, un but esthétique.
> Elles doivent aider le philosophe à approfondir les notions de nombre, d'espace, de temps.
> Et surtout leurs adeptes y trouvent des jouissances analogues à celles que donnent la peinture et la musique.

Et surtout : 1908 (SM 31-32)

> Nous ne pouvons oublier quel doit être notre but; selon moi ce but est double; notre science confine à la fois à la philosophie et à la physique, et c'est pour nos deux voisines que nous travaillons; aussi nous avons toujours vu et nous verrons encore les mathématiciens marcher dans deux directions opposées.
> D'une part, la science mathématique doit réfléchir sur elle-même et cela est utile, parce que réfléchir sur elle-même, c'est réfléchir sur l'esprit humain qui l'a créée, d'autant plus que c'est celle de ses créations

> pour laquelle il a fait le moins d'emprunts au dehors. C'est pourquoi certaines spéculations mathématiques sont utiles, comme celles qui visent l'étude des postulats, des géométries inaccoutumées, des fonctions à allure étrange...
> Mais c'est du côté opposé, du côté de la nature, qu'il faut diriger le gros de notre armée.

Encore une dernière remarque, importante. Nous avons dit que la notion d'expérience, désignée comme instance faisant face à l'esprit et non articulée au théorique, fonctionne philosophiquement; cela tient à la définition qu'en donne Poincaré comme résultant de nos sensations. Or, dans les écrits de Poincaré, toujours définie de la même façon, l'expérience est invoquée dans des contextes où elle résulte de l'usage d'un instrument - construit à l'aide d'une théorie; serait-elle alors définie par un rapport de type scientifique? Interrogeons de nouveau le texte de 1893 (SH 36)

> Malgré l'emploi des méthodes les plus perfectionnées, les résultats bruts de notre expérience présenteront toujours les caractères du continu physique avec la contradiction qui lui est inhérente.
> Nous n'y échapperons qu'en intercalant sans cesse des termes nouveaux entre les termes déjà discernés, et cette opération devra être poursuivie indéfiniment. Nous ne pourrions concevoir qu'on dût l'arrêter que si nous nous représentions quelque instrument assez puissant pour décomposer le continu physique en éléments discrets, comme le télescope résout la voie lactée en étoiles, Mais nous ne pouvons imaginer cela; en effet, c'est toujours avec nos sens que nous nous servons de nos instruments; c'est avec l'oeil que nous observons l'image agrandie par le microscope, et cette image doit, par conséquent, toujours conserver les caractères de la sensation visuelle et par conséquent ceux du continu physique.
> Rien ne distingue une longueur observée directement de la moitié de cette longueur doublée par le microscope.

L'usage d'instruments (ou de conditions posées à l'expérimentation par une théorie scientifique; nous verrons cela plus en détails dans notre chapitre sur la physique) ne donne plus lieu bien sûr à une observation pure, mais elle doit permettre une pure observation, l'expérience étant toujours définie par son rapport aux sens; une fois la mesure effectuée par l'intermédiaire d'un instrument et de conditions

théoriques (au sens scientifique), nous pouvons garder le résultat abstraction faite de l'instrument et de la théorie: le fait restera toujours une donnée des sens. Il s'ensuit une indistinction constante entre expérience, observation; il y a assimilation entre l'usage philosophique et l'usage scientifique de cette notion; ou, plus précisément, la notion philosophique et le concept scientifique se recouvrent. La conséquence en est capitale: si la recherche de l'origine des notions est comprise par Poincaré comme d'ordre philosophique, l'expérience est invoquée comme un fait. En d'autres termes, la notion d'expérience fonctionne philosophiquement, mais elle n'est pas désignée et, nous le verrons, elle ne peut l'être comme telle par Poincaré. Nous touchons là un aspect de la philosophie implicite de Poincaré.

B. Mathématiques et logiques

"Sur la nature du raisonnement mathématique", RMM2 (1894) 371-384; modifié dans SH (p. 9-28).

Le titre de l'article fait attendre au lecteur une réflexion sur les caractéristiques spécifiques à la démarche théorique mathématique; qu'en est-il en fait? "La possibilité même de la science mathématique semble une contradiction insoluble". : dès la première phrase, Poincaré situe son discours sur un terrain d'emblée philosophique: il ne s'agit pas, de prime abord, d'analyser le raisonnement mathématique dans son déroulement ou dans sa structure, mais de poser un problème beaucoup plus général non pas dans, mais sur la science constituée, problème qui, dans la tradition philosophique, se rattache au kantisme. Poincaré pose la question de la possibilité des mathématiques sous forme de dilemme - notons du reste que c'est là un mode de présentation particulièrement affectionné par Poincaré, nous en verrons les raisons plus loin:

- ou bien les mathématiques sont déductives et rigoureuses, mais stériles; elles ne reposent alors que sur les principes analytiques de la logique, réduite, selon Poincaré, aux prin-

cipes d'identité et de contradiction, et à la théorie du syllogisme; nous voyons qu'en 1894 Poincaré est singulièrement ignorant des nouveaux développements de la logique (cf. SH 10). Ce n'est que vers 1905 qu'il en pris connaissance par les travaux de Louis Couturat;

- ou bien elles sont inductives et productrices de vérités nouvelles, mais alors elles sont sujettes à perpétuelle révision.

Ainsi, dès les premières lignes de l'article, nous voyons toutes les caractérisations possibles du raisonnement mathématique situées entre deux pôles: déduction-rigueur-stérilité d'une part, induction-révisabilité-productivité d'autre part; si la nature du raisonnement mathématique ne se confond avec aucun de ces deux pôles, elle ne pourra être qu'une combinaison nouvelle des termes en présence. Les mathématiques sont ainsi situées entre la logique et la physique comprises comme les limites du savoir scientifique; ces deux limites sont philosophiques parce qu'elles se définissent par leur proximité aux deux instances déjà mentionnées: l'esprit et les sensations - nous verrons cela plus en détails dans la suite. Si l'un des termes de ces pôles - la déduction - peut effectivement caractériser spécifiquement un raisonnement scientifique, leur groupement est d'ordre philosophique.

Or, plusieurs constatations de l'ordre de l'évidence nous montrent que les caractéristiques du raisonnement mathématique ne sont assimilables ni à la première ni à la seconde des deux solutions extrêmes: "personne ne songe à mettre en doute" la rigueur des mathématiques (p. 9); elles ne peuvent donc être assimilées à une science expérimentale; d'autre part, les mathématiques ne se réduisent pas à la logique, sans quoi "le raisonnement ne pourrait nous rendre que les vérités immédiatement évidentes empruntées à l'intuition directe; il ne serait plus qu'un intermédiaire parasite" (p. 10); nous constatons de même que les mathématiques cherchent à généraliser leurs résultats, ce qui, selon Poincaré, n'est pas la démarche de la logique; enfin, si tous les rai-

sonnements mathématiques étaient analytiques, "il semble qu'un esprit assez puissant pourrait d'un seul coup d'oeil en apercevoir toutes les vérités" (p. 11).

En conséquence, le raisonnement mathématique doit être à la fois rigoureux et produire des vérités nouvelles: Poincaré donne les termes de la solution avant même d'examiner la démarche du mathématicien; ainsi, les caractéristiques internes au raisonnement mathématique découlent de la position philosophique du problème.

Néanmoins, en ce point de son exposé, Poincaré ne pense pas avoir découvert la "clef du mystère" (p. 11). Aussi procède-t-il à une analyse du raisonnement mathématique (pp. 15-18) qui lui permet de désigner ce qu'il croit être "le raisonnement mathématique par excellence" (p. 19): la démonstration par récurrence ou induction complète: "On établit d'abord un théorème pour n = 1; on montre ensuite que s'il est vrai de n-1, il est vrai de n et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers". (p. 19). Ce raisonnement est applicable dans les cas où les notions ou opérations sur lesquelles on raisonne sont préalablement définies par récurrence (cf. Mind 15 (1906) 142); et Poincaré commence effectivement son analyse par une définition de l'addition; ce qu'il en dit est important de notre point de vue, car c'est en ce point que commencent à se jouer les rapports entre la position philosophique du problème et l'analyse "concrète": "Cette définition mérite un moment d'attention, elle est d'une nature particulière qui la distingue déjà de la définition purement logique: l'égalité (1)[1] < cf. SH 15> contient en effet une infinité de définitions distinctes, chacune d'elles n'ayant un sens que quand on connaît celle qui la précède." (p. 16). Nous voyons que Poincaré rapporte cette définition aux solutions déjà avancées; nous connaissons les caractéristiques de la démarche logique: cette définition les possède-t-elle? A quelle catégorie philoso-

---

1) $x+a = [x+(a-1)]+1$

phique cette définition correspond-elle? Le rapport entre la question philosophique et sa solution mathématique (désignation de la définition et du raisonnement par récurrence) est un rapport de constatation. Ce n'est pas une remarque tout à fait anodine: elle va nous permettre de mieux cerner les relations entre philosophie et mathématiques. Examinons pour cela ce que Poincaré dit dans l'ensemble de son oeuvre du principe d'induction complète. Tout d'abord, dans l'article que nous lisons: "A chaque pas, si on y regarde bien, on retrouve ce mode de raisonnement, soit sous la forme simple que nous venons de lui donner, soit sous une forme plus ou moins modifiée." (SH 19). Et en 1905 (SM 159-160):

> Je ne voulais pas dire ⟨dans l'article de 1894⟩, comme on l'a cru, que tous les raisonnements mathématiques peuvent se réduire à une application de ce principe. En examinant ces raisonnements d'un peu près, on y verrait appliqués beaucoup d'autres principes analogues, présentant les mêmes caractères essentiels. Dans cette catégorie de principes, celui de l'induction complète est seulement le plus simple de tous et c'est pour cela que je l'ai choisi pour type.

Or, à notre connaissance, ces autres principes ne sont pas désignés explicitement par Poincaré; Mooij cite (pp. 57-58) des commentateurs qui ont proposé des solutions, telles la construction du continu ou l'axiome du choix, mais elles ne le satisfont pas, car elles ne recouvrent pas l'ensemble des démonstrations mathématiques; d'où il conclut, à notre avis, fort judicieusement:

> Aussi me semble-t-il qu'il n'y a pas de réponse satisfaisante à la question posée. La véritable intention de Poincaré a dû être beaucoup plus vague et ne peut cadrer avec une énumération explicite de quelques principes. Partant de l'expérience personnelle selon laquelle le fournissement de preuves mathématiques présuppose plus que la connaissance d'un petit nombre de lois logiques, il était par avance persuadé que la mathématique doit faire appel, non seulement à la logique, mais aussi et continuellement à l'intuition. C'est en se référant à l'induction complète qu'il a voulu rendre acceptable cet énoncé. (p. 58)

Ainsi, le silence de Poincaré sur cette question semble confirmer notre analyse du texte de 1894: le rapport

de constatation que nous venons de discerner nous montre, une fois de plus, que les mathématiques sont utilisées comme réserve d'exemples pour illustrer et justifier une thèse philosophique de portée très générale - quoique les mathématiques doivent aussi être éclairées par l'examen de ces exemples. Le discours de Poincaré n'est pas démonstratif: il pose des affirmations qu'il justifie par des exemples mathématiques qui, à l'égard de sa philosophie, jouent le rôle de faits. Poincaré fait donc ici un usage philosophique des mathématiques.

Mais ce n'est qu'un aspect de la question; ne s'agit-il que de l'exposé dans une thèse philosophique? oui, dans le sens que l'usage fait ici des mathématiques est déterminé par des positions philosophiques; mais alors, si l'enjeu est purement philosophique, pourquoi une telle description des procédés mathématiques? C'est que la solution semble découler de cette description, parce que Poincaré y exhibe un type de raisonnement qui, dans sa particularité, n'a pu être cerné par la position philosophique du problème: nous savions quelles doivent être les caractéristiques de ce raisonnement, mais nous ne savions pas que c'est l'induction complète; la "clef du mystère" ne se trouve pas dans la philosophie: elle est donnée par l'existence d'un type de raisonnement. Cela détermine chez Poincaré une intervention philosophique dans les mathématiques: l'induction complète est réinterprétée en des termes philosophiques (nous verrons cela plus en détails dans la suite); le texte dans son déroulement pourrait alors faire croire que l'enjeu du débat est intérieur aux mathématiques.

Que dire alors des relations entre philosophie et mathématiques? Poincaré pose une question qui, par sa position même, indique une solution qui n'apparaît comme telle que par sa référence à une discipline distincte de la philosophie; Poincaré élide donc la solution philosophique pour la présenter comme mathématique. En conséquence, les frontières entre philosophie et mathématiques restent très floues; plus exactement, elles ne sont pas conceptualisées rigoureusement.